Стоящие здесь интегралы можно выразить через интегралы по контуру D — по петле дислокации. Для этого замечаем следующие формулы:

$$\oint_D \frac{1}{R}[\mathbf{b}\,d\mathbf{l}'] = \int_{S_D} \frac{1}{R^2}\{(\mathbf{bv})\,d\mathbf{f}' - \mathbf{v}\,(\mathbf{b}\,d\mathbf{f}')\},$$

$$\oint_D [\mathbf{bv}]\,d\mathbf{l}' = -\int_{S_D} \frac{1}{R}\{\mathbf{b}\,d\mathbf{f}' + (\mathbf{bv})\,(\mathbf{v}\,d\mathbf{f}')\}.$$

Интегралы в правых частях равенств получаются из контурных интегралов в левой стороне применением теоремы Стокса, согласно которой преобразование осуществляется заменой $d\mathbf{l}' \to [d\mathbf{f}'\cdot\nabla']$ (где $\nabla' = \partial/\partial\mathbf{r}'$); поскольку подынтегральное выражение зависит только от разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, это преобразование эквивалентно замене $d\mathbf{l}' \to -[d\mathbf{f}'\cdot\nabla]$ (где $\nabla = \partial/\partial\mathbf{r}$). Введем также телесный угол Ω, под которым петля D видна из точки наблюдения, согласно определению

$$\Omega = \int \frac{1}{R^2}\,\mathbf{v}\,d\mathbf{f}'.$$

Тогда поле смещений представится в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{b}\frac{\Omega}{4\pi} + \frac{1}{4\pi}\oint_D \frac{1}{R}[\mathbf{b}\,d\mathbf{l}'] + \frac{1}{8\pi(1-\sigma)}\nabla\oint_D([\mathbf{bv}]\,d\mathbf{l}').$$

Неоднозначность этой функции заключена в первом члене — угол Ω меняется на 4π при обходе вокруг линии D.

Вдали от петли выражение (1) сводится к

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1-2\sigma}{8\pi(1-\sigma)R^2}\{\mathbf{S}(\mathbf{bv}) + \mathbf{b}(\mathbf{Sv}) - \mathbf{v}(\mathbf{Sb})\} + \frac{3}{8\pi(1-\sigma)R^2}(\mathbf{Sv})(\mathbf{bv})\,\mathbf{v}.$$

Эту формулу можно было бы получить и непосредственно из (27,11—12).

§ 28. Действие поля напряжений на дислокацию

Рассмотрим дислокационную петлю D в поле упругих напряжений $\sigma_{ik}^{(e)}$, созданных действующими на тело внешними нагрузками, и вычислим силу, действующую на нее в этом поле. Согласно общим правилам для этого надо найти работу δR_D, производимую над дислокацией при бесконечно малом ее смещении.

Вернемся к введенному в § 27 представлению о дислокационной петле D как линии, на которую опирается поверхность (S_D) разрыва вектора смещения; величина разрыва дается формулой (27,7). Смещение линии дислокации D приводит к изменению поверхности S_D. Пусть $\delta\mathbf{x}$ — вектор смещения точек линии D. Смещаясь на $\delta\mathbf{x}$, элемент $d\mathbf{l}$ длины линии описывает площадь $\delta\mathbf{f} = [\delta\mathbf{x}\cdot d\mathbf{l}] = [\delta\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}]\,dl$, чем и определяется приращение площади поверхности S_D. Поскольку речь идет теперь о реальном, физическом смещении дислокации, необходимо учесть, что указанная операция сопровождается изменением физического объема среды. Поскольку смещения $\mathbf{u}$ точек среды по обе стороны поверхности

различаются на величину $\mathbf{b}$, то это изменение дается произведением

$$\delta V = \mathbf{b}\, d\mathbf{f} = [\delta\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}]\,\mathbf{b}\, df = \delta\mathbf{x}\,[\boldsymbol{\tau}\mathbf{b}]\, df. \tag{28,1}$$

В связи с этим возможны две существенно различные физические ситуации. В одной из них $\delta V \equiv 0$, смещение линии дислокации не связано с изменением объема. Так будет, если смещение происходит в плоскости, определяемой векторами $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{b}$. Эту плоскость называют *плоскостью скольжения* данного элемента дислокации. Огибающую семейства плоскостей скольжения всех элементов длины петли D называют *поверхностью скольжения* дислокации; она представляет собой цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными вектору Бюргерса $\mathbf{b}$ [1]). Физическая особенность плоскости скольжения состоит в том, что только в ней возможно сравнительно легкое механическое перемещение дислокации (о котором в этом случае обычно говорят как о ее *скольжении*) [2]).

С изменением площади поверхности S_D при смещении дислокации связано изменение сингулярной деформации (27,8), сосредоточенное на линии D. Его можно представить в виде

$$\delta u_{ik}^{(\text{пл})} = {}^1/_2\,\{b_i\,[\delta\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}]_k + b_k\,[\delta\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}]_i\}\,\delta(\boldsymbol{\xi}), \tag{28,2}$$

где $\delta(\boldsymbol{\xi})$ — введенная в § 27 двухмерная δ-функция. Подчеркнем, что эта деформация однозначно определяется формой линии D и смещением $\delta\mathbf{x}$, в отличие от выражения (27,8), зависящего от произвольного выбора поверхности S_D.

Выражение (28,2) описывает локальную неупругую остаточную деформацию (ее называют *пластической*), не сопровождающуюся упругими напряжениями. Связанная с ней работа, совершаемая в конечном счете внешними источниками, дается интегралом

$$\int \sigma_{ik}^{(e)}\,\delta u_{ik}\, dV$$

(ср. (3,2)), где под δu_{ik} надо понимать полное геометрическое изменение деформации. Оно складывается из упругой и пластической частей; нас интересует здесь только работа, связанная с пластической частью [3]). После подстановки $\delta u_{ik}^{(\text{пл})}$ из (28,2), ввиду на-

---

[1]) Возможные системы плоскостей скольжения в анизотропной среде фактически определяются структурой ее кристаллической решетки.

[2]) Так, для передвижения изображенной на рис. 22 краевой дислокации в ее плоскости скольжения (плоскость x, z) достаточно сравнительно небольших перемещений атомов, в результате которых «лишними» будут оказываться все более удаленные от плоскости y, z кристаллические полуплоскости.

[3]) При выводе уравнений движения виртуальные пластическую и упругую деформации надо рассматривать как независимые переменные. Интересуясь уравнением движения дислокации, надо рассматривать только пластическую деформацию.

личия в нем δ-функции, остается интегрирование только вдоль длины дислокационной петли D:

$$\delta R_D = \oint_D \sigma_{ik}^{(e)} e_{ilm}\, \delta x_l \tau_m\, dl. \tag{28,3}$$

Коэффициент при δx_l в подынтегральном выражении есть сила f_l, действующая на единицу длины линии дислокации. Таким образом,

$$f_i = e_{ikl}\tau_k \sigma_{lm}^{(e)} b_m \tag{28,4}$$

(*M. O. Peach, J. S. Köhler*, 1950). Отметим, что сила $\mathbf{f}$ перпендикулярна вектору $\boldsymbol{\tau}$, т. е. линии дислокации.

Формула (28,3) допускает наглядную интерпретацию. Согласно сказанному выше смещение элемента линии дислокации сводится к разрезанию некоторой площадки $d\mathbf{f}$ и сдвигу верхнего берега разреза относительно нижнего на длину $\mathbf{b}$. Приложенная к $d\mathbf{f}$ сила внутренних напряжений есть $\sigma_{ik}^{(e)} df_k$, а производимая этой силой при сдвиге работа есть $b_i \sigma_{ik}^{(e)} df_k$.

Поскольку в написанном виде формула (28,4) относится только к перемещению в плоскости скольжения, имеет смысл сразу же написать проекцию силы $\mathbf{f}$ на эту плоскость. Пусть $\boldsymbol{\varkappa}$ — единичный вектор нормали к линии дислокации в плоскости скольжения. Тогда

$$f_\perp = \mathbf{f}\boldsymbol{\varkappa} = e_{ikl}\varkappa_i \tau_k b_m \sigma_{lm}^{(e)}$$

или

$$f_\perp = \nu_l \sigma_{lm}^{(e)} b_m, \tag{28,5}$$

где $\boldsymbol{\nu} = [\boldsymbol{\varkappa}\boldsymbol{\tau}]$ — вектор нормали к плоскости скольжения. Поскольку векторы $\mathbf{b}$ и $\boldsymbol{\nu}$ взаимно перпендикулярны, то (выбрав вдоль них две из координатных осей) мы видим, что сила $f_\perp$ определяется всего одной из компонент тензора $\sigma_{lm}^{(e)}$.

Если же смещение дислокации происходит не в плоскости скольжения, то $\delta V \neq 0$. Это значит, что смещение берегов разреза привело бы к появлению избытка вещества (когда один берег «перехлестывает» другой) или к его недостаче (образование щели между раздвигающимися берегами). Этого нельзя допустить, если полагать, что в процессе движения дислокации сплошность среды не нарушается и ее плотность остается неизменной (с точностью до упругих деформаций). Устранение избыточного вещества или заполнение его нехватки происходит в реальном кристалле диффузионным способом (ось дислокации становится источником или стоком диффузионных потоков вещества) [1]. О перемещении

[1] Так, изображенная на рис. 22 дислокация может перемещаться в плоскости y, z лишь за счет диффузионного ухода вещества из «лишней» полуплоскости.

дислокации, сопровождающемся диффузионным «залечиванием» дефектов сплошной среды, говорят как о ее *переползании* [1]).

Из сказанного ясно, что, допустив переползание дислокации в качестве возможного ее виртуального перемещения, необходимо считать, что оно, как и скольжение, происходит без локального изменения объема среды. Это значит, что из деформации (28,2) надо вычесть ответственную за изменение объема часть $^1/_3\,\delta_{ik}u_{ll}^{(\text{пл})}$, т. е. описывать пластическую деформацию тензором

$$\delta u_{ik}^{(\text{пл})} = \{^1/_2 b_i\,[\delta\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}]_k + {}^1/_2 b_k\,[\delta\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}]_i - {}^1/_3\delta_{ik}\mathbf{b}\,[\delta\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\tau}]\}\,\delta(\xi). \quad (28,6)$$

Соответственно вместо (28,4) получим следующую формулу для действующей на дислокацию силы [2]):

$$f_i = e_{ikl}\tau_k b_m\left(\sigma_{lm}^{(e)} - \frac{1}{3}\delta_{lm}\sigma_{nn}^{(e)}\right) \quad (28,7)$$

(*J. Weertman*, 1965). Полная сила, действующая на всю дислокационную петлю, равна

$$F_i = e_{ikl}b_m\oint_D\left(\sigma_{lm}^{(e)} - \frac{1}{3}\delta_{lm}\sigma_{nn}^{(e)}\right)dx_k. \quad (28,8)$$

Она отлична от нуля только в неоднородном поле напряжений $\left(\text{при } \sigma_{lm}^{(e)} = \text{const интеграл сводится к } \oint dx_k \equiv 0\right)$. Если на протяжении петли поле напряжений меняется мало, то

$$F_i = e_{ikl}b_m\frac{\partial}{\partial x_p}\left(\sigma_{ml}^{(e)} - \frac{1}{3}\delta_{lm}\sigma_{nn}^{(e)}\right)\oint_D x_p\,dx_k$$

(петлю представляем себе расположенной вблизи начала координат). Входящие сюда интегралы образуют антисимметричный тензор

$$\oint x_p\,dx_k = -\oint x_k\,dx_p.$$

Имея это в виду, легко выразить силу через введенный в (27,12) дислокационный момент d_{kl} [3]):

$$F_i = d_{lm}\frac{\partial\sigma_{lm}^{(e)}}{\partial x_i} + \frac{1}{3}\left(d_{ll}\frac{\partial\sigma_{nn}^{(e)}}{\partial x_l} - d_{ll}\frac{\partial\sigma_{nn}^{(e)}}{\partial x_i}\right). \quad (28,9)$$

---

[1]) Поскольку такой процесс лимитируется диффузией, он может фактически играть роль лишь при достаточно высоких температурах.

[2]) Представляется очевидным, что всестороннее (равномерное) сжатие кристалла не должно приводить к появлению силы f; выражение (28,7) этим свойством обладает.

[3]) При выводе используется также формула $e_{ikl}e_{imn} = \delta_{km}\delta_{ln} - \delta_{kn}\delta_{lm}$ и уравнения равновесия $\partial\sigma_{lm}^{(e)}/\partial x_m = 0$.

В однородном поле напряжений эта сила, как уже было указано, обращается в нуль. При этом, однако, на петлю действует момент сил

$$K_i = e_{ilm} \oint x_l f_m \, dl,$$

который тоже можно выразить через дислокационный момент:

$$K_i = e_{ikl} d_{km} \left(\sigma_{lm}^{(e)} - {}^1/_3 \delta_{lm} \sigma_{nn}^{(e)}\right). \qquad (28,10)$$

Задачи

1. Найти силу взаимодействия двух параллельных винтовых дислокаций в изотропной среде.

Решение. Сила, действующая на единицу длины одной дислокации в поле напряжений, создаваемых второй дислокацией, определяется по формуле (28,4) с помощью результатов задачи 2 § 27. Она имеет радиальное направление и равна

$$f = \mu b_1 b_2 / 2\pi r.$$

Дислокации одного знака ($b_1 b_2 > 0$) отталкиваются, а дислокации разных знаков ($b_1 b_2 < 0$) притягиваются.

2. Прямолинейная винтовая дислокация расположена параллельно плоской свободной поверхности изотропной среды. Найти действующую на дислокацию силу.

Решение. Пусть плоскость y, z совпадает с поверхностью тела, а дислокация параллельна оси z и имеет координаты $x = x_0$, $y = 0$.

Поле напряжений, оставляющее поверхность среды свободной, описывается суммой полей дислокации и ее зеркального отражения в плоскости y, z, как если бы они были расположены в неограниченной среде:

$$\sigma_{xz} = -\frac{\mu b}{2\pi}\left[\frac{y}{(x-x_0)^2+y^2} - \frac{y}{(x+x_0)^2+y^2}\right],$$

$$\sigma_{yz} = \frac{\mu b}{2\pi}\left[\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+y^2} - \frac{x+x_0}{(x+x_0)^2+y^2}\right].$$

Такое поле действует на рассматриваемую дислокацию с силой, равной притяжению со стороны ее зеркального изображения, т. е. дислокация притягивается к поверхности среды с силой

$$f = \mu b^2 / 4\pi x_0.$$

3. Найти силу взаимодействия двух параллельных краевых дислокаций в изотропной среде, расположенных в параллельных плоскостях скольжения.

Решение. Пусть плоскости скольжения параллельны плоскостям x, z, а ось z параллельна линиям дислокаций; ка и в задаче 4 § 27, полагаем $\tau_z = -1$, $b_x = b$. Тогда сила, действующая на единицу длины дислокации в поле упругих напряжений σ_{ik}, имеет компоненты

$$f_x = b\sigma_{xy}, \quad f_y = -b\sigma_{xx}.$$

В данном случае σ_{ik} определяются выражениями, найденными в задаче 4 § 27. Если одна дислокация совпадает с осью z, то она действует на вторую дислокацию, проходящую через точку x, y на плоскости x, y, с силой, компоненты которой в полярных координатах равны

$$f_r = \frac{b_1 b_2 B}{r}, \quad f_\varphi = \frac{b_1 b_2 B}{r} \sin 2\varphi, \quad B = \frac{\mu}{2\pi(1-\sigma)}.$$

Проекция же силы на плоскость скольжения равна

$$f_x = b_1 b_2 B \frac{\cos\varphi \cos 2\varphi}{r}.$$

Она обращается в нуль при $\varphi = \pi/2$ и при $\varphi = \pi/4$. Первое из этих положений соответствует устойчивому равновесию при $b_1 b_2 > 0$, а второе — при $b_1 b_2 < 0$.

§ 29. Непрерывное распределение дислокаций

Если в кристалле имеется одновременно много дислокаций, находящихся на относительно малых (хотя, конечно, и больших по сравнению с постоянной решетки) расстояниях, то становится целесообразным их усредненное рассмотрение. Другими словами, рассматриваются «физически бесконечно малые» элементы объема кристалла, через которые проходит достаточно много дислокационных линий.

Формулировка уравнения, выражающего основное свойство дислокационных деформаций, достигается естественным обобщением уравнения (27,6). Введем тензор ρ_{ik} (*тензор плотности дислокаций*) такой, чтобы его интеграл по поверхности, опирающейся на любой контур L, был равен сумме $\mathbf{b}$ векторов Бюргерса всех дислокационных линий, охватываемых этим контуром:

$$\int\limits_{S_L} \rho_{ik}\, df_i = b_k. \tag{29,1}$$

Непрерывные функции ρ_{ik} описывают распределение дислокаций в кристалле. Этот тензор заменяет собой теперь выражение в правой части уравнения (27,6):

$$e_{ilm} \frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l} = -\rho_{ik}. \tag{29,2}$$

Как видно из этого уравнения, тензор ρ_{ik} должен удовлетворять условию

$$\frac{\partial \rho_{ik}}{\partial x_i} = 0 \tag{29,3}$$

(в случае одиночной дислокации это условие выражает собой просто постоянство вектора Бюргерса вдоль линии дислокации).

При таком рассмотрении дислокаций тензор w_{ik} становится первичной величиной, описывающей деформацию и определяющей тензор деформации согласно (27,4). Вектор же смещения $\mathbf{u}$, который был бы связан с w_{ik} определением (27,2), при этом вообще не может быть введен (это ясно уже из того, что при таком определении левая сторона уравнения (29,2) тождественно обратилась бы в нуль во всем объеме кристалла).

До сих пор мы предполагали дислокации неподвижными. Выясним теперь, каким образом должна быть сформулирована система уравнений, позволяющая в принципе определить упругие дефор-