

Проекция же силы на плоскость скольжения равна

$$f_x = b_1 b_2 B \frac{\cos \varphi \cos 2\varphi}{r}.$$

Она обращается в нуль при $\varphi = \pi/2$ и при $\varphi = \pi/4$. Первое из этих положений соответствует устойчивому равновесию при $b_1 b_2 > 0$, а второе — при $b_1 b_2 < 0$.

§ 29. Непрерывное распределение дислокаций

Если в кристалле имеется одновременно много дислокаций, находящихся на относительно малых (хотя, конечно, и больших по сравнению с постоянной решетки) расстояниях, то становится целесообразным их усредненное рассмотрение. Другими словами, рассматриваются «физически бесконечно малые» элементы объема кристалла, через которые проходит достаточно много дислокационных линий.

Формулировка уравнения, выражающей основное свойство дислокационных деформаций, достигается естественным обобщением уравнения (27,6). Введем тензор ρ_{ik} (тензор плотности дислокаций) такой, чтобы его интеграл по поверхности, опирающейся на любой контур L , был равен сумме b векторов Бюргерса всех дислокационных линий, охватываемых этим контуром:

$$\int_L \rho_{ik} df_i = b_k. \quad (29,1)$$

Непрерывные функции ρ_{ik} описывают распределение дислокаций в кристалле. Этот тензор заменяет собой теперь выражение в правой части уравнения (27,6):

$$e_{ilm} \frac{\partial w_{mk}}{\partial x_l} = -\rho_{ik}. \quad (29,2)$$

Как видно из этого уравнения, тензор ρ_{ik} должен удовлетворять условию

$$\frac{\partial \rho_{ik}}{\partial x_i} = 0 \quad (29,3)$$

(в случае одиночной дислокации это условие выражает собой просто постоянство вектора Бюргерса вдоль линии дислокации).

При таком рассмотрении дислокаций тензор w_{ik} становится первичной величиной, описывающей деформацию и определяющей тензор деформации согласно (27,4). Вектор же смещения u , который был бы связан с w_{ik} определением (27,2), при этом вообще не может быть введен (это ясно уже из того, что при таком определении левая сторона уравнения (29,2) тождественно обратилась бы в нуль во всем объеме кристалла).

До сих пор мы предполагали дислокации неподвижными. Выясним теперь, каким образом должна быть сформулирована система уравнений, позволяющая в принципе определить упругие дефор-

мации и напряжения в среде, в которой дислокации совершают заданное движение¹⁾.

Уравнение (29,2) не зависит от того, покоятся или движутся дислокации. При этом тензор w_{ik} по-прежнему остается величиной, определяющей упругую деформацию; его симметричная часть есть тензор упругой деформации, связанный обычным образом законом Гука с тензором напряжений.

Это уравнение, однако, теперь недостаточно для полного формулирования задачи. Полная система уравнений должна определять также и скорость v перемещения точек среды.

Но при этом необходимо учесть, что движение дислокаций сопровождается, помимо изменения упругой деформации, также и изменением формы кристалла, не связанным с возникновением напряжений — *пластической деформацией*. Как уже упоминалось, движение дислокаций как раз и представляет собой механизм пластической деформации. (Связь движения дислокаций с пластической деформацией ясно демонстрируется рис. 25: в результате прохождения краевой дислокации слева направо верхняя — над плоскостью скольжения — часть кристалла оказывается сдвинутой на один период решетки; поскольку решетка в результате остается правильной, то кристалл остается ненапряженным.) В противоположность упругой деформации, однозначно связанной с термодинамическим состоянием тела, пластическая деформация является функцией процесса. При рассмотрении неподвижных дислокаций вопрос о разделении упругой и пластической деформаций не возникает: нас интересуют при этом лишь напряжения, не зависящие от предыдущей истории кристалла.

Пусть u — вектор геометрического смещения точек среды, отсчитываемый, скажем, от их положения перед началом процесса деформации; его производная по времени $u = v$. Если образовать с помощью вектора u тензор «полнейшей дисторсии» $W_{ik} = \partial u_k / \partial x_i$, то мы получим его «пластическую часть» $w_{ik}^{(pl)}$, вычтя из W_{ik} тен-

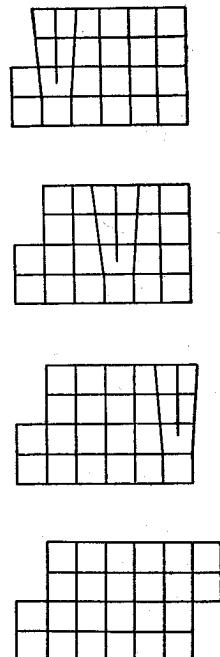


Рис. 25

¹⁾ Мы не занимаемся здесь вопросом об определении самого движения дислокаций по приложенным к телу силам. Решение этого вопроса требует детального изучения микроскопического механизма движения дислокаций и их торможения на различных дефектах, которое должно производиться с учетом фактических данных о реальных кристаллах.

зор «упругой дисторсии», совпадающий с фигурирующим в (29,2) тензором w_{ik} . Введем обозначение

$$-j_{ik} = \frac{\partial w_{ik}^{(пл)}}{\partial t}; \quad (29,4)$$

симметричная часть j_{ik} определяет скорость изменения тензора пластической деформации: изменение $u_{ik}^{(пл)}$ за бесконечно малое время δt равно

$$\delta u_{ik}^{(пл)} = -\frac{1}{2} (j_{ik} + j_{ki}) \delta t \quad (29,5)$$

(E. Kröner, G. Rieder, 1956). Отметим, в частности, что если пластическая деформация происходит без нарушения сплошности тела, то след тензора j_{ik} равен нулю. Действительно, пластическая деформация не приводит к растяжению или сжатию тела (которые всегда связаны с возникновением внутренних напряжений), т. е. $u_{kk}^{(пл)} = 0$, а потому $j_{kk} = -\partial u_{kk}^{(пл)}/\partial t = 0$.

Подставив в определение (29,4) $w_{ik}^{(пл)} = W_{ik} - w_{ik}$, запишем его в виде уравнения

$$\frac{\partial w_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + j_{ik}, \quad (29,6)$$

связывающего скорости изменения упругой и пластической деформаций. Здесь j_{ik} надо рассматривать как заданные величины, которые должны удовлетворять условиям, обеспечивающим совместность уравнений (29,6) и (29,2). Эти условия получаются дифференцированием (29,2) по времени и подстановкой в него (29,6); они имеют вид уравнения

$$\frac{\partial \rho_{ik}}{\partial t} + e_{ilm} \frac{\partial j_{mk}}{\partial x_l} = 0. \quad (29,7)$$

Уравнения (29,2), (29,6) вместе с динамическими уравнениями

$$\rho \dot{v}_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \quad \sigma_{ik} = \lambda_{tklm} u_{lm} = \lambda_{tklm} w_{lm}, \quad (29,8)$$

составляют полную систему уравнений, описывающих динамику упругой среды с движущимися дислокациями (A. M. Коссевич, 1962). Фигурирующие в этих уравнениях тензоры ρ_{ik} и j_{ik} являются заданными функциями координат (и времени), характеризующими распределение и движение дислокаций. Эти функции должны удовлетворять условиям совместности уравнений (29,2) друг с другом и с уравнением (29,6), выражаемым равенствами (29,3) и (29,7).

Условие (29,7) можно рассматривать как дифференциальное выражение «закона сохранения вектора Бюргерса» в среде. Действительно, проинтегрировав обе стороны уравнения (29,7) по поверхности, опирающейся на некоторую замкнутую линию L , введя

согласно (29,1) полный вектор Бюргерса \mathbf{b} охваченных линией L дислокаций и воспользовавшись теоремой Стокса, получим

$$\frac{db_k}{dt} = - \oint_L j_{ik} dx_i. \quad (29,9)$$

Из вида этого равенства очевидно, что интеграл в его правой части определяет величину вектора Бюргерса «протекающего» в единицу времени через контур L , т. е. уносимого дислокациями, пересекающими линию L . Поэтому естественно назвать j_{ik} тензором *плотности потока дислокаций*.

Ясно, в частности, что в случае отдельной дислокационной петли тензор j_{ik} имеет вид

$$j_{ik} = e_{ilm} \rho_{lk} V_m = e_{ilm} \tau_l V_m b_k \delta(\xi) \quad (29,10)$$

в соответствии с выражением (28,2) для пластической деформации при смещении дислокации; здесь \mathbf{V} — скорость линии дислокаций в данной ее точке. При этом вектор потока через элемент $d\mathbf{l}$ контура L ($j_{ik} d\mathbf{l}_i$) пропорционален $d\mathbf{l} [\tau \mathbf{V}] = \mathbf{V} [d\mathbf{l} \tau]$, т. е. проекции скорости \mathbf{V} на направление, перпендикулярное как $d\mathbf{l}$, так и τ ; из геометрических соображений очевидно, что так и должно было быть — только эта проекция скорости приводит к пересечению дислокаций элемента $d\mathbf{l}$.

Отметим, что след тензора (29,10) пропорционален проекции скорости дислокации на нормаль к ее плоскости скольжения. Выше было указано, что отсутствие неупругого изменения плотности среды обеспечивается условием $j_{ii} = 0$. Мы видим, что для отдельной дислокации это условие означает движение в плоскости скольжения в соответствии со сказанным выше о физической природе движения дислокаций (см. примечание 2 на стр. 160).

Наконец, остановимся на случае, когда дислокационные петли в кристалле распределены таким образом, что их суммарный вектор Бюргерса (обозначим его \mathbf{B}) равен нулю¹⁾. Это условие означает, что при интегрировании по любому поперечному сечению тела

$$\int \rho_{ik} d\mathbf{f}_i = 0. \quad (29,11)$$

Отсюда следует, что плотность дислокаций в этом случае может быть представлена в виде

$$\rho_{ik} = e_{ilm} \frac{\partial P_{mk}}{\partial x_i} \quad (29,12)$$

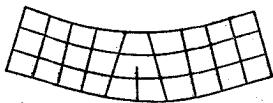


Рис. 26

¹⁾ Наличие дислокаций связано с некоторым изгибом кристалла, как это схематически изображено в упрощенном виде на рис. 26. Условие $\mathbf{B} = 0$ означает отсутствие макроскопического изгиба кристалла в целом.

(F. Kroupa, 1962); тогда интеграл (29,11) преобразуется в интеграл по контуру, проходящему вне тела и обращается в нуль. Отметим также, что выражение (29,12) автоматически удовлетворяет условию (29,3).

Легко видеть, что определенный таким образом тензор P_{ih} представляет собой плотность дислокационного момента в деформированном кристалле (его естественно назвать поэтому *дислокационной поляризацией*). Действительно, полный дислокационный момент кристалла D_{ih} равен по определению

$$D_{ih} = \sum S_i b_h = \frac{1}{2} e_{ilm} \sum b_h \oint x_l dx_m = \frac{1}{2} \int e_{ilm} x_l \varphi_{mh} dV,$$

где суммирование производится по всем дислокационным петлям, а интегрирование — по всему объему кристалла. Подставив сюда (29,12), имеем

$$D_{ih} = \frac{1}{2} \int e_{ilm} e_{mpq} x_l \frac{\partial P_{qh}}{\partial x_p} dV = \frac{1}{2} \int x_m \left(\frac{\partial P_{mh}}{\partial x_i} - \frac{\partial P_{ih}}{\partial x_m} \right) dV$$

и после интегрирования по частям в каждом из двух членов

$$D_{ih} = \int P_{ih} dV. \quad (29,13)$$

Плотность же потока дислокаций выражается через тот же тензор P_{ih} согласно

$$j_{ih} = - \frac{\partial P_{ih}}{\partial t}. \quad (29,14)$$

В этом легко убедиться, например, вычислив интеграл $\int j_{ih} dV$ по произвольной части объема тела с помощью выражения (29,10) как сумму по всем заключенным в этом объеме дислокационным петлям. Отметим, что выражение (29,14) вместе с (29,12) автоматически удовлетворяют условию (29,7).

Сравнив (29,14) и (29,4), мы видим, что $\delta\omega_{ik}^{(пл)} = \delta P_{ik}$. Если условиться считать пластическую деформацию отсутствующей в состоянии с $P_{ik} = 0$, то будет и $\omega_{ik}^{(пл)} = P_{ik}$. Подразумевается, что весь процесс деформации происходит при $\mathbf{B} = 0$. Это обстоятельство надо подчеркнуть, поскольку между тензорами P_{ik} и $\omega_{ik}^{(пл)}$ существует принципиальное различие: в то время как P_{ik} является функцией состояния тела, тензор $\omega_{ik}^{(пл)}$ не есть функция состояния, а зависит от процесса, приведшего тело в данное состояние. В этих условиях имеем

$$\omega_{ik} = W_{ik} - \omega_{ik}^{(пл)} = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - P_{ik}, \quad (29,15)$$

где снова u_k — вектор полного геометрического смещения от положения в недеформированном состоянии. Уравнение (29,6) при этом

удовлетворяется тождественно, а динамическое уравнение (29,8) принимает вид

$$\rho \ddot{u}_i - \lambda_{iklm} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k \partial x_l} = -\lambda_{iklm} \frac{\partial P_{lm}}{\partial x_k}. \quad (29,16)$$

Таким образом, определение упругой деформации, созданной движущимися дислокациями с $\mathbf{B} = 0$, сводится к задаче обычной теории упругости с объемными силами, распределенными по кристаллу с плотностью $-\lambda_{iklm} \partial P_{lm} / \partial x_k$.

§ 30. Распределение взаимодействующих дислокаций

Рассмотрим совокупность большого числа одинаковых прямолинейных дислокаций, расположенных параллельно друг другу в одной и той же плоскости скольжения, и выведем уравнение, определяющее их равновесное распределение. Пусть ось z параллельна дислокациям, а плоскость x, z совпадает с плоскостью скольжения.

Будем для определенности считать, что векторы Бюргерса дислокаций направлены вдоль оси x . Тогда сила, действующая в плоскости скольжения на единицу длины дислокации, равна $b\sigma_{xy}$, где σ_{xy} — напряжение в точке нахождения дислокации.

Напряжения, создаваемые одной прямолинейной дислокацией (и действующие на другую дислокацию), убывают обратно пропорционально расстоянию от нее. Поэтому напряжение, создаваемое в точке x дислокацией, находящейся в точке x' , имеет вид $bD/(x-x')$, где D — постоянная порядка величины упругих модулей кристалла. Можно показать, что эта постоянная $D > 0$, т. е. две одинаковые дислокации в одной и той же плоскости скольжения отталкиваются друг от друга (для изотропной среды это показано в задаче 3 § 28).

Обозначим посредством $\rho(x)$ линейную плотность дислокаций, распределенных на отрезке (a_1, a_2) оси x ; $\rho(x) dx$ есть сумма векторов Бюргерса дислокаций, проходящих через точки интервала dx . Тогда полное напряжение, создаваемое в точке x оси x всеми дислокациями, запишется в виде интеграла

$$\sigma_{xy}(x) = -D \int_{a_1}^{a_2} \frac{\rho(\xi) d\xi}{\xi - x}. \quad (30,1)$$

Для точек внутри самого отрезка (a_1, a_2) этот интеграл должен пониматься в смысле главного значения для того, чтобы исключить физически бессмысличное действие дислокации самой на себя.

Если в кристалле имеется также и плоское (в плоскости x, y) поле напряжений $\sigma_{xy}^{(e)}(x, y)$, созданное заданными внешними нагрузками, то каждая дислокация будет находиться под действием силы $b(\sigma_{xy} + p(x))$, где мы обозначили для краткости