удовлетворяется тождественно, а динамическое уравнение (29,8) принимает вид

$$\rho\ddot{u}_i - \lambda_{iklm}\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_k\,\partial x_l} = -\lambda_{iklm}\frac{\partial P_{lm}}{\partial x_k}. \qquad (29,16)$$

Таким образом, определение упругой деформации, созданной движущимися дислокациями с $\mathbf{B} = 0$, сводится к задаче обычной теории упругости с объемными силами, распределенными по кристаллу с плотностью $-\lambda_{iklm}\partial P_{lm}/\partial x_k$.

§ 30. Распределение взаимодействующих дислокаций

Рассмотрим совокупность большого числа одинаковых прямолинейных дислокаций, расположенных параллельно друг другу в одной и той же плоскости скольжения, и выведем уравнение, определяющее их равновесное распределение. Пусть ось z параллельна дислокациям, а плоскость x, z совпадает с плоскостью скольжения.

Будем для определенности считать, что векторы Бюргерса дислокаций направлены вдоль оси x. Тогда сила, действующая в плоскости скольжения на единицу длины дислокации, равна $b\sigma_{xy}$, где σ_{xy} — напряжение в точке нахождения дислокации.

Напряжения, создаваемые одной прямолинейной дислокацией (и действующие на другую дислокацию), убывают обратно пропорционально расстоянию от нее. Поэтому напряжение, создаваемое в точке x дислокацией, находящейся в точке x', имеет вид $bD/(x-x')$, где D — постоянная порядка величины упругих модулей кристалла. Можно показать, что эта постоянная $D > 0$, т. е. две одинаковые дислокации в одной и той же плоскости скольжения отталкиваются друг от друга (для изотропной среды это показано в задаче 3 § 28).

Обозначим посредством $\rho(x)$ линейную плотность дислокаций, распределенных на отрезке (a_1, a_2) оси x; $\rho(x)\,dx$ есть сумма векторов Бюргерса дислокаций, проходящих через точки интервала dx. Тогда полное напряжение, создаваемое в точке x оси x всеми дислокациями, запишется в виде интеграла

$$\sigma_{xy}(x) = -D\int_{a_1}^{a_2}\frac{\rho(\xi)\,d\xi}{\xi - x}. \qquad (30,1)$$

Для точек внутри самого отрезка (a_1, a_2) этот интеграл должен пониматься в смысле главного значения для того, чтобы исключить физически бессмысленное действие дислокации самой на себя.

Если в кристалле имеется также и плоское (в плоскости x, y) поле напряжений $\sigma_{xy}^{(e)}(x, y)$, созданное заданными внешними нагрузками, то каждая дислокация будет находиться под действием силы $b(\sigma_{xy} + p(x))$, где мы обозначили для краткости

$p(x) = \sigma_{xy}^{(e)}(x, 0)$. Условие равновесия заключается в обращении этой силы в нуль: $\sigma_{xy} + p = 0$, т. е.

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{\rho(\xi)\, d\xi}{\xi - x} = \frac{p(x)}{D} \equiv \omega(x), \tag{30,2}$$

где главное значение обозначено, как это принято, перечеркнутым знаком интеграла. Это — интегральное уравнение для определения равновесного распределения $\rho(x)$. Оно относится к типу сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши.

Решение такого уравнения сводится к задаче теории функций комплексного переменного, формулируемой следующим образом.

Обозначим посредством $\Omega(z)$ функцию, определенную во всей плоскости комплексного z (с разрезом по отрезку (a_1, a_2)), как интеграл

$$\Omega(z) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\rho(\xi)\, d\xi}{\xi - z}. \tag{30,3}$$

Посредством $\Omega^+(x)$ и $\Omega^-(x)$ обозначим предельные значения $\Omega(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза. Они равны таким же интегралам, взятым по отрезку (a_1, a_2) с обходом точки $z = x$ соответственно снизу или сверху по бесконечно малой полуокружности, т. е.

$$\Omega^{\pm}(x) = \int_{a_1}^{a_2} \frac{\rho(\xi)\, d\xi}{\xi - x} \pm i\pi\rho(x). \tag{30,4}$$

Если $\rho(\xi)$ удовлетворяет уравнению (30,2), то главное значение интеграла равно $\omega(x)$, так что имеем

$$\Omega^+(x) + \Omega^-(x) = 2\omega(x), \tag{30,5}$$

$$\Omega^+(x) - \Omega^-(x) = 2\, i\pi\rho(x). \tag{30,6}$$

Таким образом, задача о решении уравнения (30,2) эквивалентна задаче об отыскании аналитической функции $\Omega(z)$ со свойством (30,5), после чего $\rho(x)$ определяется по (30,6). При этом физические условия рассматриваемой задачи требуют также, чтобы было $\Omega(\infty) = 0$; это следует из того, что вдали от системы дислокаций ($x \to \pm\infty$) напряжения σ_{xy} должны обращаться в нуль (по определению (30,3), вне отрезка (a_1, a_2): $\sigma_{xy}(x) = -D\Omega(x)$).

Рассмотрим сначала случай, когда внешние напряжения отсутствуют ($p(x) \equiv 0$), а дислокации сдерживаются какими-либо препятствиями (дефектами решетки) на концах отрезка (a_1, a_2). При $\omega(x) = 0$ имеем из (30,5): $\Omega^+(x) = -\Omega^-(x)$, т. е. функция $\Omega(z)$ должна менять знак при обходе каждой из двух точек a_1, a_2. Этому условию удовлетворяет любая функция вида

$$\Omega(z) = \frac{P(z)}{\sqrt{(a_2 - z)(z - a_1)}}, \tag{30,7}$$

где $P(z)$ — полином. Условие же $\Omega(\infty) = 0$ фиксирует (с точностью до постоянного коэффициента) выбор $P(z) = 1$, так что

$$\Omega(z) = \frac{1}{\sqrt{(a_2 - z)(z - a_1)}}. \tag{30,8}$$

Такой же вид будет иметь, согласно (30,6), и искомая функция $\rho(x)$. Определив коэффициент в ней согласно условию

$$\int_{a_1}^{a_2} \rho(\xi)\, d\xi = B \tag{30,9}$$

(B — сумма векторов Бюргерса всех дислокаций), получим

$$\rho(x) = \frac{B}{\pi\sqrt{(a_2 - x)(x - a_1)}}. \tag{30,10}$$

Мы видим, что дислокации скапливаются по направлению к препятствиям (границам отрезка) с плотностью, обратно пропорциональной корню из расстояний до них. По такому же закону возрастают при приближении к a_1 или a_2 напряжения вне отрезка (a_1, a_2); так, при $x > a_2$

$$\sigma_{xy} \approx \frac{BD}{\sqrt{(x - a_2)(a_2 - a_1)}}.$$

Другими словами, концентрация дислокаций у границы приводит к такой же концентрации напряжений по другую сторону границы.

Предположим теперь, что в тех же условиях (препятствия в заданных концах отрезка) имеется также и внешнее поле напряжений $p(x)$. Обозначим посредством $\Omega_0(z)$ функцию вида (30,7) и перепишем равенство (30,5) (разделив его на $\Omega_0^+ = -\Omega_0^-$) в виде

$$\frac{\Omega^+(x)}{\Omega_0^+(x)} - \frac{\Omega^-(x)}{\Omega_0^-(x)} = \frac{2\omega(x)}{\Omega_0^+(x)}.$$

Сравнив это равенство с (30,6), заключаем из него, что

$$\frac{\Omega(z)}{\Omega_0(z)} = \frac{1}{i\pi}\int_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi)}{\Omega_0^+(\xi)}\frac{d\xi}{\xi - z} + i\pi P(z) \tag{30,11}$$

где $P(z)$ — полином. Решение, удовлетворяющее условию $\Omega(\infty) = 0$, получим, выбрав в качестве $\Omega_0(z)$ функцию (30,8) и положив $P(z) = C$ (C — константа). Искомая функция $\rho(x)$ находится отсюда по формуле (30,6) и равна

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi^2\sqrt{(a_2 - x)(x - a_1)}}\int_{a_1}^{a_2} \omega(\xi)\sqrt{(a_2 - \xi)(\xi - a_1)}\frac{d\xi}{\xi - x} + \\ + \frac{C}{\sqrt{(a_2 - x)(x - a_1)}}. \tag{30,12}$$

Постоянная C определяется условием (30,9). И здесь $\rho(x)$ возрастает при $x \to a_2$ (или $x \to a_1$) по закону $(a_2 - x)^{-1/2}$, а по другую сторону препятствия возникает такая же концентрация напряжений.

Если препятствие имеется только с одной стороны (скажем, в точке a_2), то искомое решение должно удовлетворять условию конечности напряжений при всех $x < a_2$, включая точку $x = a_1$; при этом само положение последней точки заранее неизвестно и должно определиться в результате решения задачи. В терминах $\Omega(z)$ это значит, что $\Omega(a_1)$ должно быть конечным. Такая функция (удовлетворяющая также и условию $\Omega(\infty) = 0$) получится по той же формуле (30,11), если в качестве $\Omega_0(z)$ выбрать функцию

$$\Omega_0(z) = \sqrt{\frac{z - a_1}{a_2 - z}},$$

тоже относящуюся к виду (30,7), и положить в (30,11) $P(z) = 0$. В результате получим

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{\frac{x - a_1}{a_2 - x}} \int\limits_{a_1}^{a_2} \sqrt{\frac{a_2 - \xi}{\xi - a_1}} \frac{\omega(\xi)\, d\xi}{\xi - x}. \qquad (30,13)$$

При $x \to a_1$ $\rho(x)$ обращается в нуль как $\sqrt{x - a_1}$. По такому же закону стремится к нулю с другой стороны точки a_1 полное напряжение $\sigma_{xy}(x) + p(x)$.

Наконец, пусть препятствия отсутствуют в обоих концах отрезка и дислокации сдерживаются лишь внешними напряжениями $p(x)$. Соответствующее $\Omega(z)$ получим, положив в (30,11)

$$\Omega_0(z) = \sqrt{(a_2 - z)(z - a_1)}, \quad P(z) = 0.$$

Однако условие $\Omega(\infty) = 0$ требует при этом соблюдения дополнительного условия: произведя в (30,11) предельный переход к $z \to \infty$, найдем

$$\int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi)\, d\xi}{\sqrt{(a_2 - \xi)(\xi - a_1)}} = 0. \qquad (30,14)$$

Искомая функция $\rho(x)$ дается формулой

$$\rho(x) = -\frac{1}{\pi^2}\sqrt{(a_2 - x)(x - a_1)} \int\limits_{a_1}^{a_2} \frac{\omega(\xi)}{\sqrt{(a_2 - \xi)(\xi - a_1)}} \frac{d\xi}{\xi - x}, \qquad (30,15)$$

причем координаты a_1, a_2 концов отрезка определяются условиями (30,9) и (30,14).

Задача

Найти распределение дислокаций в однородном поле напряжений ($p(x) = p_0$) на участке с препятствием на одном или на обоих концах.

Решение. В случае препятствия на одном конце (a_2) вычисление интеграла (30,13) дает

$$\rho(x) = \frac{p_0}{\pi D}\sqrt{\frac{x-a_1}{a_2-x}}.$$

Из условия же (30,9) определяется длина участка расположения дислокаций: $a_2 - a_1 = 2BD/p_0$. Вблизи препятствия, по другую сторону от него, напряжения концентрируются по закону

$$\sigma_{xy} \approx p_0\sqrt{\frac{a_2-a_1}{x-a_2}}.$$

В случае участка (длины $2L$), ограниченного двумя препятствиями, выбираем начало отсчета x в его середине и находим по (30,12)

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{L^2-x^2}}\left(\frac{p_0}{D}x + B\right).$$