ГЛАВА V

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ И ВЯЗКОСТЬ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

§ 31. Уравнение теплопроводности в твердых телах

Неравномерная нагретость твердой среды не приводит к возникновению в ней конвекции, как это обычно имеет место в жидкостях. Поэтому перенос тепла осуществляется здесь одной только теплопроводностью. В связи с этим процессы теплопроводности в твердых телах описываются сравнительно более простыми уравнениями, чем в жидкостях, где они осложняются конвекцией.

Уравнение теплопроводности в твердой среде может быть выведено непосредственно из закона сохранения энергии, выраженного в виде уравнения непрерывности для количества тепла. Количество тепла, поглощаемое в единицу времени в единице объема тела, равно $T\,\partial S/\partial t$, где S — энтропия единицы объема. Эта величина должна быть приравнена $-\operatorname{div}\mathbf{q}$, где $\mathbf{q}$ — плотность потока тепла. Этот поток практически всегда пропорционален градиенту температуры, т. е. может быть записан в виде $q = -\varkappa\nabla T$ ($\varkappa$ — теплопроводность). Таким образом,

$$T\frac{\partial S}{\partial t} = \operatorname{div}(\varkappa\nabla T). \tag{31,1}$$

Согласно формуле (6,4) энтропия может быть написана в виде

$$S = S_0(T) + K\alpha u_{ii},$$

где α — температурный коэффициент расширения, а S_0 — энтропия тела в недеформированном состоянии. Будем предполагать, что, как это обычно имеет место, имеющиеся в теле разности температур достаточно малы для того, чтобы можно было считать постоянными такие величины, как $\varkappa$, α и т. п. Тогда уравнение (31,1) после подстановки написанного для S выражения примет вид

$$T\frac{\partial S_0}{\partial t} + \alpha KT\frac{\partial u_{ii}}{\partial t} = \varkappa\Delta T.$$

Согласно известной термодинамической формуле имеем

$$C_p - C_v = K\alpha^2 T.$$

Производную от S_0 можно написать как

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = \frac{\partial S_0}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{C_v}{T}\frac{\partial T}{\partial t}$$

(производная $\partial S_0/\partial T$ берется при $u_{ii} \equiv \operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, т. е. при постоянном объеме).

В результате получим уравнение теплопроводности в следующем виде:

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{C_p - C_v}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{u} = \varkappa \Delta T. \qquad (31,2)$$

Для того чтобы получить полную систему уравнений, надо присоединить сюда еще уравнение, определяющее деформацию неравномерно нагретого тела. Этим уравнением является уравнение равновесия (7,8)

$$2(1-\sigma) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - (1-2\sigma) \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{2\alpha(1+\sigma)}{3} \nabla T. \qquad (31,3)$$

Из уравнения (31,3) может быть определена, в принципе, деформация тела при произвольно заданном распределении температуры. Подстановка полученного таким образом для $\operatorname{div} \mathbf{u}$ выражения в уравнение (31,2) приведет к уравнению, определяющему распределение температуры, в котором неизвестной функцией является одна только $T(x, y, z, t)$.

Рассмотрим, например, теплопроводность в неограниченной твердой среде с распределением температуры, удовлетворяющим только одному условию: на бесконечности температура стремится к постоянному пределу T_0 и деформация отсутствует. В таком случае уравнение (31,3) приводит к следующей зависимости между $\operatorname{div} \mathbf{u}$ и T (см. задачу 8 § 7):

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \alpha (T - T_0).$$

Подставляя это выражение в (31,2), получим уравнение

$$\frac{(1+\sigma) C_p + 2(1-2\sigma) C_v}{3(2-\sigma)} \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \Delta T \qquad (31,4)$$

типа простого уравнения теплопроводности.

Уравнением такого же типа описывается и распределение температуры вдоль длины тонкого прямого стержня, если хотя бы один из его концов не закреплен. Распределение температуры вдоль каждого из поперечных сечений стержня можно считать постоянным, так что T будет функцией только от координаты x вдоль его длины (и от времени). Тепловое расширение такого стержня приводит только к изменению его длины без изменения прямолинейной формы и без возникновения внутренних напряжений в нем. Ясно поэтому, что производная $\partial S/\partial t$ в общем уравнении (31,1) должна браться при постоянном давлении, и поскольку $(\partial S/\partial t)_p = C_p/T$, то распределение температуры будет описываться одномерным уравнением теплопроводности

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Надо, впрочем, отметить, что с практически достаточной точностью распределение температуры в твердом теле может всегда

определяться простым уравнением теплопроводности. Дело в том, что второй член в левой стороне уравнения (31,2) представляет собой поправку порядка $(C_p - C_v)/C_v$ по сравнению с первым членом. Но у твердых тел разница между различными теплоемкостями обычно весьма мала, и если пренебрегать ею, то уравнение теплопроводности в твердых телах можно всегда писать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \tag{31,5}$$

где χ — есть *температуропроводность*, определяемая как отношение $\chi = \varkappa/C$ — коэффициента $\varkappa$ к некоторой средней теплоемкости C единицы объема.

§ 32. Теплопроводность кристаллов

В анизотропном теле направление потока тепла $\mathbf{q}$ не должно, вообще говоря, совпадать с направлением градиента температуры. Поэтому вместо формулы $\mathbf{q} = -\varkappa \nabla T$ между $\mathbf{q}$ и градиентом температуры в кристалле имеет место более общая зависимость

$$q_i = -\varkappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \tag{32,1}$$

Тензор второго ранга $\varkappa_{ik}$ называют тензором теплопроводности кристалла. Соответственно этой зависимости уравнение теплопроводности (31,5) тоже будет иметь более общий вид

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa_{ik} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k}. \tag{32,2}$$

Тензор теплопроводности симметричен:

$$\varkappa_{ik} = \varkappa_{ki}. \tag{32,3}$$

Это утверждение, к доказательству которого мы теперь перейдем, является следствием принципа симметрии кинетических коэффициентов (см. V, § 120).

Скорость увеличения полной энтропии тела благодаря необратимым процессам теплопроводности равна

$$\dot{S}_{\text{пол}} = -\int \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} dV = -\int \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} dV + \int \mathbf{q} \operatorname{grad} \frac{1}{T} dV.$$

Первый интеграл, будучи преобразован в интеграл по поверхности, исчезает. Таким образом, получаем

$$\dot{S}_{\text{пол}} = \int \mathbf{q} \nabla \frac{1}{T} dV = -\int \frac{\mathbf{q} \nabla T}{T^2} dV,$$

или

$$\dot{S}_{\text{пол}} = -\int \frac{1}{T^2} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} dV. \tag{32,4}$$