определяться простым уравнением теплопроводности. Дело в том, что второй член в левой стороне уравнения (31,2) представляет собой поправку порядка $(C_p - C_v)/C_v$ по сравнению с первым членом. Но у твердых тел разница между различными теплоемкостями обычно весьма мала, и если пренебрегать ею, то уравнение теплопроводности в твердых телах можно всегда писать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T, \tag{31,5}$$

где χ — есть *температуропроводность*, определяемая как отношение $\chi = \varkappa/C$ — коэффициента $\varkappa$ к некоторой средней теплоемкости C единицы объема.

§ 32. Теплопроводность кристаллов

В анизотропном теле направление потока тепла $\mathbf{q}$ не должно, вообще говоря, совпадать с направлением градиента температуры. Поэтому вместо формулы $\mathbf{q} = -\varkappa \nabla T$ между $\mathbf{q}$ и градиентом температуры в кристалле имеет место более общая зависимость

$$q_i = -\varkappa_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \tag{32,1}$$

Тензор второго ранга $\varkappa_{ik}$ называют тензором теплопроводности кристалла. Соответственно этой зависимости уравнение теплопроводности (31,5) тоже будет иметь более общий вид

$$C \frac{\partial T}{\partial t} = \varkappa_{ik} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_k}. \tag{32,2}$$

Тензор теплопроводности симметричен:

$$\varkappa_{ik} = \varkappa_{ki}. \tag{32,3}$$

Это утверждение, к доказательству которого мы теперь перейдем, является следствием принципа симметрии кинетических коэффициентов (см. V, § 120).

Скорость увеличения полной энтропии тела благодаря необратимым процессам теплопроводности равна

$$\dot{S}_{\text{пол}} = -\int \frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{T} dV = -\int \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{T} dV + \int \mathbf{q} \operatorname{grad} \frac{1}{T} dV.$$

Первый интеграл, будучи преобразован в интеграл по поверхности, исчезает. Таким образом, получаем

$$\dot{S}_{\text{пол}} = \int \mathbf{q} \nabla \frac{1}{T} dV = -\int \frac{\mathbf{q} \nabla T}{T^2} dV,$$

или

$$\dot{S}_{\text{пол}} = -\int \frac{1}{T^2} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} dV. \tag{32,4}$$

В соответствии с общим определением кинетических коэффициентов [1]) мы можем заключить на основании (32,4), что в данном случае таковыми являются коэффициенты $T^2\varkappa_{ik}$ в соотношениях

$$q_i = -T^2\varkappa_{ik}\left(\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x_k}\right).$$

Поэтому из симметрии кинетических коэффициентов непосредственно следует искомое соотношение (32,3).

Квадратичная форма

$$-q_i\frac{\partial T}{\partial x_i} = \varkappa_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k}$$

должна быть существенно положительной, поскольку положительной должна быть производная (32,4) от энтропии по времени. Условием существенной положительности квадратичной формы является, как известно, положительность главных значений матрицы ее коэффициентов. Поэтому все главные значения тензора теплопроводности $\varkappa_{ik}$ всегда положительны, что, впрочем, очевидно и из простых соображений о направлении теплового потока.

Число различных независимых компонент тензора $\varkappa_{ik}$ зависит от симметрии кристалла. Поскольку тензор $\varkappa_{ik}$ симметричен, это число такое же, как у симметричного тензора второго ранга α_{ik} (тензора теплового расширения; см. § 10).

§ 33. Вязкость твердых тел

При изучении движения в упругих телах мы до сих пор считали, что процесс деформирования происходит обратимым образом. В действительности процесс термодинамически обратим, только если он происходит с бесконечно малой скоростью, так что в каждый данный момент в теле успевает установиться состояние термодинамического равновесия. Реальное движение происходит, однако, с конечной скоростью, тело не находится в каждый данный момент в равновесии, и поэтому в нем происходят процессы, стремящиеся привести его в равновесное состояние. Наличие этих процессов и приводит к необратимости движения, проявляющейся, в частности, в диссипации механической энергии, переходящей в конце концов в тепло [2]).

Диссипация энергии обусловливается процессами двух родов. Во-первых, при неодинаковости температуры в разных местах тела в нем возникают необратимые процессы теплопроводности. Во-вторых, если в теле происходит какое-нибудь внутреннее дви-

---

[1]) Используется определение в форме, данной в VI, § 59.

[2]) Под механической энергией здесь подразумевается сумма кинетической энергии макроскопического движения в упругом теле и его потенциальной (упругой) энергии, обусловленной наличием деформации.