В соответствии с общим определением кинетических коэффициентов [1]) мы можем заключить на основании (32,4), что в данном случае таковыми являются коэффициенты $T^2\varkappa_{ik}$ в соотношениях

$$q_i = -T^2\varkappa_{ik}\left(\frac{1}{T^2}\frac{\partial T}{\partial x_k}\right).$$

Поэтому из симметрии кинетических коэффициентов непосредственно следует искомое соотношение (32,3).

Квадратичная форма

$$-q_i\frac{\partial T}{\partial x_i} = \varkappa_{ik}\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k}$$

должна быть существенно положительной, поскольку положительной должна быть производная (32,4) от энтропии по времени. Условием существенной положительности квадратичной формы является, как известно, положительность главных значений матрицы ее коэффициентов. Поэтому все главные значения тензора теплопроводности $\varkappa_{ik}$ всегда положительны, что, впрочем, очевидно и из простых соображений о направлении теплового потока.

Число различных независимых компонент тензора $\varkappa_{ik}$ зависит от симметрии кристалла. Поскольку тензор $\varkappa_{ik}$ симметричен, это число такое же, как у симметричного тензора второго ранга α_{ik} (тензора теплового расширения; см. § 10).

§ 33. Вязкость твердых тел

При изучении движения в упругих телах мы до сих пор считали, что процесс деформирования происходит обратимым образом. В действительности процесс термодинамически обратим, только если он происходит с бесконечно малой скоростью, так что в каждый данный момент в теле успевает установиться состояние термодинамического равновесия. Реальное движение происходит, однако, с конечной скоростью, тело не находится в каждый данный момент в равновесии, и поэтому в нем происходят процессы, стремящиеся привести его в равновесное состояние. Наличие этих процессов и приводит к необратимости движения, проявляющейся, в частности, в диссипации механической энергии, переходящей в конце концов в тепло [2]).

Диссипация энергии обусловливается процессами двух родов. Во-первых, при неодинаковости температуры в разных местах тела в нем возникают необратимые процессы теплопроводности. Во-вторых, если в теле происходит какое-нибудь внутреннее дви-

---

[1]) Используется определение в форме, данной в VI, § 59.

[2]) Под механической энергией здесь подразумевается сумма кинетической энергии макроскопического движения в упругом теле и его потенциальной (упругой) энергии, обусловленной наличием деформации.

жение, то происходят необратимые процессы, связанные с конечностью скорости движения; эти процессы диссипации энергии можно назвать, как и в жидкостях, процессами внутреннего трения или вязкости.

В большинстве случаев скорость макроскопического движения в теле настолько мала, что диссипация энергии незначительна. Такие «почти обратимые» процессы могут быть описаны с помощью так называемой диссипативной функции (см. V, § 121).

Именно, если имеется некоторая механическая система, движение которой сопровождается диссипацией энергии, то движение может быть описано посредством обычных уравнений движения, в которых надо только к действующим на систему силам добавить *диссипативные силы* или *силы трения*, являющиеся линейными функциями скоростей. Эти силы могут быть представлены в виде производных по скоростям от некоторой квадратичной функции скоростей, называемой диссипативной функцией R. Сила трения f_a, соответствующая какой-нибудь из обобщенных координат q_a системы, имеет тогда вид

$$f_a = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_a}.$$

Диссипативная функция является существенно положительной квадратичной формой скоростей $\dot{q}_a$. Написанное соотношение эквивалентно соотношению

$$\delta R = -\sum_a f_a \delta \dot{q}_a, \tag{33,1}$$

где δR — изменение диссипативной функции при бесконечно малом изменении скоростей. Можно также показать, что удвоенная диссипативная функция $2R$ определяет уменьшение механической энергии системы в единицу времени.

Легко обобщить соотношение (33,1) на случай движения с трением в сплошном теле. В этом случае состояние системы определяется непрерывным рядом обобщенных координат. Этими координатами является вектор смещения $\mathbf{u}$, заданный в каждой точке тела. Соответственное этому соотношение (33,1) должно быть написано в интегральном виде:

$$\delta \int R\, dV = -\int f_i\, \delta v_i\, dV, \tag{33,2}$$

где $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$, а $\mathbf{f}$ — диссипативная сила, действующая на единицу объема тела; мы пишем полную диссипативную функцию всего тела в виде $\int R\, dV$, где R — диссипативная функция, отнесенная к единице объема тела.

Определим теперь общий вид диссипативной функции R для деформируемых тел. Функция R, описывающая внутреннее трение, должна обращаться в нуль, если в теле отсутствует внутрен-

нее движение, в частности, если тело совершает только поступательное или вращательное движение как целое. Другими словами, диссипативная функция должна обращаться в нуль при $\mathbf{v} = \text{const}$ и при $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega r}]$. Это значит, что она должна зависеть не от самой скорости, а от ее градиента, причем может содержать лишь такие комбинации производных, которые обращаются в нуль при $\mathbf{v} = [\mathbf{\Omega r}]$. Таковыми являются суммы

$$v_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right),$$

т. е. производные тензора деформации по времени [1]). Таким образом, диссипативная функция должна быть квадратичной функцией от v_{ik}. Наиболее общий вид такой функции:

$$R = {}^1/_2\eta_{iklm}v_{ik}v_{lm}. \tag{33,3}$$

Тензор четвертого ранга η_{iklm} может быть назван тензором вязкости. Этот тензор обладает следующими очевидными свойствами симметрии [2]):

$$\eta_{iklm} = \eta_{lmik} = \eta_{kilm} = \eta_{ikml}. \tag{33,4}$$

Выражение (33.3) аналогично выражению (10,1) для свободной энергии кристалла: вместо тензора упругости в нем стоит теперь тензор η_{iklm}, а вместо u_{ik} — тензор v_{ik}. Поэтому все результаты, полученные в § 10 для тензора λ_{iklm} в кристаллах различной симметрии, в полной мере относятся и к тензору η_{iklm}.

В частности, в изотропном теле тензор η_{iklm} имеет всего две независимые компоненты и R может быть написано в виде, аналогичном выражению (4,3) для упругой энергии изотропного тела:

$$R = \eta\left(v_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}v_{ll}\right)^2 + \frac{\zeta}{2}v_{ll}^2, \tag{33,5}$$

где η и ζ — два коэффициента вязкости. Поскольку R — существенно положительная функция, коэффициенты η, ζ должны быть положительными.

Соотношение (33,2) аналогично соотношению, имеющему место для свободной упругой энергии:

$$\delta\int F\,dV = -\int F_i\,\delta u_i\,dV,$$

где $F_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ — сила, действующая на единицу объема тела. Поэтому выражение для диссипативной силы через тензор v_{ik}

---

[1]) Ср. аналогичные рассуждения по поводу вязкой жидкости (VI, § 15).

[2]) Напомним, что существование диссипативной функции является следствием принципа симметрии кинетических коэффициентов Онсагера. Именно этот принцип приводит к первому из равенств (33,4) (для коэффициентов в линейных соотношениях (33,7)), эквивалентному факту существования квадратичной формы (33,3). Это будет прямо показано по аналогичному поводу в § 41.

может быть написано непосредственно по аналогии с тем, как F_i выражается через u_{ik}:

$$f_i = \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \tag{33,6}$$

где диссипативный тензор напряжений σ'_{ik} определяется посредством

$$\sigma'_{ik} = \frac{\partial R}{\partial v_{ik}} = \eta_{iklm} v_{lm}. \tag{33,7}$$

Учет вязкости в уравнениях движения может быть осуществлен, следовательно, просто путем замены тензора напряжений σ_{ik} в этих уравнениях суммой $\sigma_{ik} + \sigma'_{ik}$.

В изотропном теле

$$\sigma'_{ik} = 2\eta \left(v_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} v_{ll} \right) + \zeta v_{ll} \delta_{ik}. \tag{33,8}$$

Это выражение, естественно, формально совпадает с выражением для вязкого тензора напряжений в жидкости.

§ 34. Поглощение звука в твердых телах

Коэффициент поглощения звука в твердых телах может быть вычислен вполне аналогично тому, как это делается для жидкостей (см. VI, § 79). Произведем здесь соответствующие вычисления для изотропного тела.

Диссипация механической энергии в теле дается суммой

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -\frac{\varkappa}{T} \int (\nabla T)^2 dV - 2 \int R\, dV,$$

где первый член обусловлен теплопроводностью, а второй — вязкостью. Воспользовавшись выражением (33,5), имеем, таким образом, формулу

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -\frac{\varkappa}{T} \int (\nabla T)^2 dV - 2\eta \int \left(v_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} v_{ll} \right)^2 dV - \zeta \int v_{ll}^2\, dV. \tag{34,1}$$

Для вычисления градиента температуры пользуемся тем, что звуковые колебания в первом приближении адиабатичны. С помощью выражения (6,4) для энтропии пишем условие адиабатичности в виде

$$S_0(T) + K\alpha u_{ii} = S_0(T_0),$$

где T_0 — температура в недеформированном состоянии. Разлагая разность $S_0(T) - S_0(T_0)$ в ряд по степеням $T - T_0$, имеем с точностью до членов первого порядка

$$S_0(T) - S_0(T_0) = (T - T_0) \frac{\partial S_0}{\partial T_0} = \frac{C_v}{T_0} (T - T_0)$$