

может быть написано непосредственно по аналогии с тем, как F_i выражается через u_{ik} :

$$f_i = \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}, \quad (33,6)$$

где диссипативный тензор напряжений σ'_{ik} определяется посредством

$$\sigma'_{ik} = \frac{\partial R}{\partial v_{ik}} = \eta_{iklm} v_{lm}. \quad (33,7)$$

Учет вязкости в уравнениях движения может быть осуществлен, следовательно, просто путем замены тензора напряжений σ_{ik} в этих уравнениях суммой $\sigma_{ik} + \sigma'_{ik}$.

В изотропном теле

$$\sigma'_{ik} = 2\eta \left(v_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} v_{ll} \right) + \xi v_{ll} \delta_{ik}. \quad (33,8)$$

Это выражение, естественно, формально совпадает с выражением для вязкого тензора напряжений в жидкости.

§ 34. Поглощение звука в твердых телах

Коэффициент поглощения звука в твердых телах может быть вычислен вполне аналогично тому, как это делается для жидкостей (см. VI, § 79). Произведем здесь соответствующие вычисления для изотропного тела.

Диссипация механической энергии в теле дается суммой

$$\dot{E}_{\text{мех}} = - \frac{x}{T} \int (\nabla T)^2 dV - 2 \int R dV,$$

где первый член обусловлен теплопроводностью, а второй — вязкостью. Воспользовавшись выражением (33,5), имеем, таким образом, формулу

$$\dot{E}_{\text{мех}} = - \frac{x}{T} \int (\nabla T)^2 dV - 2\eta \int \left(v_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} v_{ll} \right)^2 dV - \xi \int v_{ll}^2 dV. \quad (34,1)$$

Для вычисления градиента температуры пользуемся тем, что звуковые колебания в первом приближении адиабатичны. С помощью выражения (6,4) для энтропии пишем условие адиабатичности в виде

$$S_0(T) + K\alpha u_{ii} = S_0(T_0),$$

где T_0 — температура в недеформированном состоянии. Разлагая разность $S_0(T) - S_0(T_0)$ в ряд по степеням $T - T_0$, имеем с точностью до членов первого порядка

$$S_0(T) - S_0(T_0) = (T - T_0) \frac{\partial S_0}{\partial T_0} = \frac{C_v}{T_0} (T - T_0)$$

(производная от энтропии берется при $u_{tt} = 0$, т. е. при постоянном объеме). Таким образом, имеем

$$T - T_0 = - \frac{T\alpha K}{C_v} u_{tt}.$$

Воспользовавшись также соотношениями

$$K \equiv K_{из} = \frac{C_b}{C_p} K_{ад}, \quad \frac{K_{ад}}{\rho} = c_t^2 - \frac{4}{3} c_s^2,$$

переписываем это выражение в виде

$$T - T_0 = - \frac{T\alpha\rho}{C_p} \left(c_t^2 - \frac{4}{3} c_s^2 \right) u_{tt}. \quad (34,2)$$

Рассмотрим сначала поглощение поперечных упругих волн. Теплопроводность вообще не может привести к поглощению таких волн (в рассматриваемом приближении). Действительно, в поперечной волне $u_{tt} = 0$, и потому температура в ней, согласно (34,2), постоянна. Пусть направление распространения волны выбрано в качестве оси x ; тогда

$$u_x = 0, \quad u_y = u_{0y} \cos(kx - \omega t), \quad u_z = u_{0z} \cos(kx - \omega t)$$

и из компонент тензора деформации отличны от нуля только

$$u_{xy} = - \frac{u_{0y}k}{2} \sin(kx - \omega t), \quad u_{xz} = - \frac{u_{0z}k}{2} \sin(kx - \omega t).$$

Будем относить диссиацию энергии к единице объема тела; для среднего (по времени) значения этой величины получаем из (34,1)

$$\bar{E}_{мех} = - \frac{\eta\omega^4}{2c_t^2} (u_{0y}^2 + u_{0z}^2),$$

где мы подставили $k = \omega/c_t$. Полная же средняя энергия волны равна удвоенной средней кинетической энергии; относя эту величину тоже к единице объема, получим

$$\bar{E} = \rho \bar{u}^2 \equiv \frac{\rho\omega^2}{2} (u_{0y}^2 + u_{0z}^2).$$

Коэффициент поглощения звука определяется как отношение средней диссиляции энергии к удвоенному среднему потоку энергии в волне; эта величина определяет закон изменения амплитуды волны с расстоянием, убывающей пропорционально $e^{-\gamma x}$. Таким образом, находим для коэффициента поглощения поперечных волн следующее выражение:

$$\gamma_t = \frac{|\bar{E}_{мех}|}{2c_t \bar{E}} = \frac{\eta\omega^2}{2\rho c_t^3}. \quad (34,3)$$

В продольной звуковой волне $u_x = u_0 \cos(kx - \omega t)$, $u_y = u_z = 0$. Аналогичное вычисление с помощью формул (34,1) и (34,2) приводит к результату:

$$\eta_t = -\frac{\omega^2}{2\rho c_l^3} \left[\left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) + \frac{\kappa T \alpha^2 \rho^2 c_l^2}{C_p^2} \left(1 - \frac{4c_l^2}{3c_l^2} \right)^2 \right]. \quad (34,4)$$

Эти формулы относятся, строго говоря, лишь к полностью изотропным аморфным телам. По порядку величины они, однако, определяют закон поглощения звука также и в анизотропных монокристаллах.

Свообразные особенности представляет поглощение звука в поликристаллических телах. Если длина волны звука λ мала по сравнению с размерами a отдельных кристаллитов, то в каждом кристаллите звук поглощается так же, как он поглощался бы в большом кристалле, и коэффициент поглощения пропорционален ω^2 .

Если же $\lambda \gg a$, то характер поглощения меняется. В такой волне можно считать, что каждый кристаллит подвергается воздействию однородно распределенного давления. Но ввиду анизотропии кристаллитов и граничных условий на поверхностях их соприкосновения возникающая при этом деформация неоднородна. Она будет испытывать существенные изменения (изменение порядка величины ее самой) на протяжении размеров кристаллита, а не на протяжении длины волны, как это было бы в однородном теле. Для поглощения звука существенны скорости изменения деформации и возникающие градиенты температуры. Из них первые будут иметь по-прежнему обычный порядок величины. Градиенты же температуры в пределах каждого кристаллита аномально велики. Поэтому поглощение звука, обусловленное теплопроводностью, будет велико по сравнению с поглощением, связанным с вязкостью, и достаточно вычислить только первое.

Рассмотрим два различных предельных случая. Время, в течение которого происходит выравнивание температур на расстояниях $\sim a$ путем теплопроводности (время релаксации для теплопроводности), — порядка величины a^2/χ . Предположим сначала, что $\omega \ll \chi/a^2$. Это значит, что время релаксации мало по сравнению с периодом колебаний в волне, и потому тепловое равновесие в пределах каждого кристаллита в значительной степени успевает установиться; мы имеем здесь дело с почти изотермическими колебаниями.

Пусть T' — возникающие в кристаллите разности температур, а T'_0 — разности, которые возникли бы при адиабатическом процессе. Расход тепла путем теплопроводности (на единицу объема) есть

$$-\operatorname{div} q = \kappa \Delta T' \sim \kappa T'/a^2.$$

Количество же тепла, выделяющееся при деформации, — порядка величины $\dot{T}_0' C \sim \omega T_0' C$ (C — теплоемкость). Приравнивая эти два выражения, получим

$$T' \sim T_0' \frac{\omega a^2}{\chi}.$$

Температура испытывает изменение $\sim T'$ на протяжении размеров кристаллита, так что ее градиент $\sim T'/a$. Наконец, T_0' находим из (34,2), где надо положить $u_{ii} \sim ku \sim u\omega/c$ (u — амплитуда вектора смещения):

$$T_0' \sim \frac{T \alpha \rho c \omega}{C} u \quad (34,5)$$

(оценивая порядки величин, мы, естественно, не отличаем различные скорости звука c). С помощью этих результатов вычисляем диссипацию энергии в единице объема:

$$\bar{E}_{\text{мех}} \sim \frac{\kappa}{T} (\nabla T)^2 \sim \frac{\kappa}{T} \left(\frac{T'}{a} \right)^2$$

и, разделив ее на поток энергии $c\bar{E} \sim c\rho\omega^2 u^2$, получим искомый коэффициент затухания

$$\gamma \sim \frac{T \alpha \rho c a^2}{\chi C} \omega^2 \text{ при } \omega \ll \frac{\chi}{a^2} \quad (34,6)$$

(C. Zener, 1938). Сравнивая это выражение с обычным выражением (34,3) и (34,4), мы можем сказать, что в рассматриваемом случае поглощение звука поликристаллическим телом происходит так, как если бы оно обладало вязкостью

$$\eta \sim T \alpha^8 \rho^8 c^4 a^3 / \chi C$$

гораздо большей, чем истинная вязкость составляющих его кристаллитов.

Далее, рассмотрим обратный предельный случай, когда $\omega \gg \chi/a^2$. Другими словами, время релаксации велико по сравнению с периодом колебаний в волне, и за время каждого периода не успевает произойти заметное выравнивание возникающих при деформации разностей температур. Было бы, однако, неправильным считать, что определяющие поглощению звука градиенты температуры порядка величины T_0'/a . Тем самым мы учитывали бы лишь процесс теплопроводности внутри каждого кристаллита. Между тем основную роль в данном случае должен играть теплообмен между соседними кристаллами (M. A. Исакович, 1948). Если бы кристаллиты были теплоизолированы друг от друга, то на границе между ними создавались бы разности температур того же порядка величины T_0' , что и разности температур в пределах отдельного кристаллита. В действительности же граничные условия требуют непрерывности температуры при переходе через поверхности соприкосновения между кристаллитами. В ре-

зультате возникают «распространяющиеся» от границ внутрь кристаллита «температурные волны», затухающие на расстоянии¹⁾

$$\delta \sim (\chi/\omega)^{1/2}.$$

В рассматриваемом случае $\delta \ll a$, т. е. основной градиент температуры — порядка величины T'_0/δ и имеет место на расстояниях, малых по сравнению с общими размерами кристаллита. Соответствующая часть объема кристаллита $\sim a^2\delta$; относя ее к полному объему $\sim a^3$, найдем среднюю диссипацию энергии:

$$\bar{E}_{\text{мех}} \sim \frac{\chi}{T} \left(\frac{T'_0}{\delta} \right)^2 \frac{a^2\delta}{a^3} \approx \frac{\chi T'_0{}^2}{Ta\delta}.$$

Подставив для T'_0 выражение (34,5) и разделив на $c\bar{E} \sim c\omega^2 u^2$, получим искомый коэффициент поглощения

$$\gamma \sim \frac{T a^2 \rho c}{a C} \sqrt{\chi \omega} \text{ при } \omega \gg \frac{\chi}{a^2}. \quad (34,7)$$

Он оказывается пропорциональным корню из частоты²⁾.

Таким образом, коэффициент поглощения звука в поликристаллическом теле при самых малых частотах ($\omega \ll \chi/a^2$) меняется как ω^2 ; затем в области $\chi/a^2 \ll \omega \ll c/a$ он меняется пропорционально $\omega^{1/2}$, а при $\omega \gg c/a$ коэффициент поглощения снова пропорционален ω^2 .

Аналогичные соображения относятся и к затуханию поперечных волн в тонких стержнях и пластинках. Если h есть толщина стержня или пластиинки, то при $\lambda \gg h$ существен градиент температуры в поперечном направлении и затухание обусловлено в основном теплопроводностью (см. задачи этого параграфа). Если при этом выполняется неравенство $\omega \ll \chi/h^2$, то колебания можно считать изотермическими; поэтому при определении, например, частот собственных колебаний стержня или пластиинки надо в этом случае пользоваться изотермическими значениями модулей упругости.

¹⁾ Напомним, что если теплопроводящая среда ограничена плоскостью $x = 0$, избыточная температура которой изменяется периодически по закону $T' = T'_0 e^{-i\omega t}$, то распределение температуры в среде описывается «температурой волной»

$$T' = T'_0 \exp [-i\omega t - (1 + i)x \sqrt{\omega/2\chi}]$$

(см. VI, § 52).

²⁾ Такой же частотной зависимостью характеризуется поглощение звука, распространяющегося в жидкости или в газе вблизи твердой стенки (например, по трубе); см. VI, § 79.

Задачи

1. Определить коэффициент затухания продольных собственных колебаний стержня.

Решение. Коэффициент затухания колебаний со временем определяется как

$$\beta = |\bar{E}_{\text{мех}}| / 2\bar{E};$$

амплитуда колебаний убывает со временем пропорционально $e^{-\beta t}$.

В продольной волне в каждом малом участке стержня происходит простое растяжение или сжатие; компоненты тензора деформации

$$u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad u_{xx} = u_{yy} = -\sigma_{\text{ад}} \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Для u_z пишем $u_z = u_0 \cos kz \cos \omega t$, где

$$k = \frac{\omega}{\sqrt{E_{\text{ад}}/\rho}}.$$

Вычисления, аналогичные приведенным в тексте, приводят к следующему выражению для коэффициентов затухания:

$$\beta = \frac{\omega^3}{2\rho} \left\{ \frac{\eta}{3} \frac{3c_l^2 - 4c_t^2}{(c_l^2 - c_t^2)c_t^2} + \frac{\zeta c_t^2}{(c_l^2 - c_t^2)(3c_l^2 - 4c_t^2)} + \frac{\kappa T \rho^3 \alpha^2}{9C_p^2} \right\}.$$

Вместо $E_{\text{ад}}$, $\sigma_{\text{ад}}$ мы ввели здесь скорости c_l , c_t согласно формулам (22,4).

2. То же для продольных колебаний пластиинки.

Решение. Для волн с направлением колебаний, параллельным направлению волн (оси x), имеем следующие отличные от нуля компоненты тензора деформации:

$$u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad u_{zz} = -\frac{\sigma_{\text{ад}}}{1 - \sigma_{\text{ад}}} \frac{\partial u_x}{\partial x}$$

(см. (13,1)). Скорость распространения этих волн равна

$$\left[\frac{E_{\text{ад}}}{\rho(1 - \sigma_{\text{ад}}^2)} \right]^{1/2}.$$

Вычисление приводит к результату:

$$\beta = \frac{\omega^3}{2\rho} \left\{ \frac{\eta}{3} \frac{3c_l^4 + 4c_l^2 - 6c_l^2 c_t^2}{c_l^2 c_t^2 (c_l^2 - c_t^2)} + \frac{\zeta c_t^2}{c_l^2 (c_l^2 - c_t^2)} + \frac{\kappa T \alpha^2 \rho^3 (1 + \sigma_{\text{ад}})^2}{9C_p^2} \right\}.$$

Для волн с направлением колебаний, перпендикулярным направлению волн, $u_{ll} = 0$ и затухание обусловлено одной только вязкостью η . Коэффициент затухания для таких случаев всегда определяется формулой

$$\beta = \eta \omega^2 / 2\rho c_l^2.$$

К этим случаям относится также и затухание крутильных колебаний в стержнях.

3. Определить коэффициент затухания поперечных собственных колебаний стержня (с частотами, удовлетворяющими условию $\omega \gg \chi/h^2$, h — толщина стержня).

Решение. Основную роль в затухании играет теплопроводность. Согласно § 17 имеем в каждом элементе объема стержня

$$u_{zz} = \frac{x}{R}, \quad u_{xx} = u_{yy} = -\sigma_{\text{ад}} \frac{x}{R}$$

(изгиб в плоскости x, z); при $\omega \gg \chi/h^3$ колебания адиабатичны. При слабом изгибе радиус кривизны $R = 1/X''$, так что

$$u_{ii} = (1 - 2\sigma_{ad}) \times X''$$

(штрих означает дифференцирование по z). Наиболее быстрое изменение температура испытывает в направлении поперек стержня; поэтому $(\nabla T)^2 \approx (\partial T / \partial x)^2$. С помощью (34,1) и (34,2) получаем для средней диссипации энергии во всем стержне

$$-\frac{\kappa T \alpha^2 E_{ad}^2 S}{9C_p^2} \int \overline{X''^2} dz$$

(S — площадь сечения стержня). Среднюю полную энергию можно найти как удвоенную потенциальную энергию:

$$E_{ad} I_y \int \overline{X''^2} dz.$$

Окончательно получим для коэффициента затухания

$$\beta = \frac{\kappa T \alpha^2 S E_{ad}}{18 I_y C_p^2}.$$

4. То же для поперечных колебаний пластинки.

Решение. Согласно (11,4) имеем в каждом элементе объема пластинки

$$u_{ii} = -\frac{1 - 2\sigma_{ad}}{1 - \sigma_{ad}} z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$$

(изгиб в плоскости x, z). Диссипацию энергии находим по формулам (34,1) и (34,2), а полную среднюю энергию — удваивая выражение (11,6). Коэффициент затухания равен

$$\beta = \frac{2\kappa T \alpha^2 E_{ad}}{3C_p^2 h^2} \frac{1 + \sigma_{ad}}{1 - \sigma_{ad}} = \frac{2\kappa T \alpha^2 \rho}{3C_p^2 h^2} \frac{(3c_l^2 - 4c_t^2)^2 c_t^2}{(c_l^2 - c_t^2) c_l^2}.$$

5. Определить изменение собственных частот поперечных колебаний стержня, связанное с неадиабатичностью колебаний. Стержень имеет форму длинной пластинки толщины h . Поверхность стержня предполагается теплоизолированной.

Решение. Пусть $T_{ad}(x, t)$ есть распределение температуры в стержне при адиабатических колебаниях, а $T(x, t)$ — истинное распределение температуры в нем (x — координата вдоль толщины стержня; изменением температуры вдоль плоскости y, z пренебрегаем как более медленным). Поскольку при $\dot{T} = T_{ad}$ теплообмен между отдельными участками тела отсутствует, ясно, что уравнение теплопроводности должно иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (T - T_{ad}) = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

При периодических колебаниях с частотой ω отклонения $\tau_{ad} = T_{ad} - T_0$, $\tau = T - T_0$ температуры от своего равновесного значения T_0 пропорциональны $e^{-i\omega t}$, и мы имеем

$$\tau'' + \frac{i\omega}{\chi} \tau = \frac{i\omega}{\chi} \tau_{ad}$$

(штрих означает дифференцирование по x). Поскольку τ_{ad} , согласно (34,2), пропорционально u_{ll} , а компоненты u_{ik} пропорциональны x (см. § 17), то $\tau_{ad} =$

$= Ax$, где A — постоянная, которую нет надобности вычислять (она выпадает из окончательного ответа). Решение уравнения

$$\tau'' + \frac{i\omega}{\chi} \tau = \frac{i\omega}{\chi} Ax$$

с граничным условием $\tau' = 0$ при $x = \pm h/2$ (поверхность стержня теплоизолирована) есть

$$\tau = A \left(x - \frac{\sin kx}{k \cos(kh/2)} \right), \quad k = (1+i) \sqrt{\frac{\omega}{2\chi}}.$$

Момент M_y сил внутренних напряжений в изогнутом стержне (изгиб в плоскости xz) складывается из изотермической части $M_{y\text{из}}$ (момент при изотермическом изгибе) и из части, связанной с неравномерной нагретостью стержня. Если $M_{y\text{ад}}$ есть момент при адиабатическом изгибе, то при не вполне адиабатическом процессе дополнительная часть момента уменьшается по сравнению с величиной $M_{y\text{ад}} - M_{y\text{из}}$ в отношении

$$1 + f(\omega) = \int_{-h/2}^{h/2} z\tau dz / \int_{-h/2}^{h/2} z\tau_{\text{ад}} dz.$$

Определяя при произвольной частоте ω модуль Юнга E_ω как коэффициент пропорциональности между M_y и I_y/R (см. (17,8)) и замечая, что $E_{\text{ад}} - E = E^2 T \alpha^2 / 9 C_p$ (см. (6,8); E — изотермический модуль Юнга), можем написать:

$$E_\omega = E + [1 + f(\omega)] E^2 \frac{T \alpha^2}{9 C_p}.$$

Вычисление дает для $f(\omega)$ выражение

$$f(\omega) = \frac{24}{h^3 k^3} \left(\frac{kh}{2} - \operatorname{tg} \frac{kh}{2} \right).$$

При $\omega \rightarrow \infty$ получаем, как и должно было быть, $f = 1$, так что $E_\infty = E_{\text{ад}}$, а при $\omega \rightarrow 0$ $f = 0$ и $E_0 = E$.

Частоты собственных колебаний пропорциональны корню из модуля Юнга (см. задачи 4—6 § 25). Поэтому имеем

$$\omega = \omega_0 \left[1 + f(\omega_0) \frac{ET\alpha^2}{18C_p} \right],$$

где ω_0 — значения собственных частот при полной адиабатичности колебаний. Это ω комплексно. Разделяя действительную и мнимую части ($\omega = \omega' + i\beta$), получаем окончательно для собственной частоты

$$\omega' = \omega_0 \left[1 - \frac{ET\alpha^2}{3C_p h^2} \frac{1}{\xi^3} \frac{\operatorname{sh} \xi - \sin \xi}{\operatorname{ch} \xi + \cos \xi} \right]$$

и для коэффициента затухания

$$\beta = \frac{2ET\alpha^2 \chi}{3C_p h^2} \left[1 - \frac{1}{\xi} \frac{\operatorname{sh} \xi + \sin \xi}{\operatorname{ch} \xi + \cos \xi} \right],$$

где введено обозначение $\xi = h (\omega_0/2\chi)^{1/2}$.

При больших значениях ξ частота ω стремится, как и следовало, к ω_0 , а коэффициент затухания к

$$\beta = 2ET\alpha^2 \chi / 3C_p h^2$$

в согласии с результатом задачи 3.

Малые же значения ξ соответствуют почти изотермическим условиям; в этом случае

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{ET\alpha^2}{18C_p} \right) \approx \omega_0 (E/E_{\text{ад}})^{1/2},$$

а коэффициент затухания

$$\beta = \frac{ET^2\alpha^2 h^2}{180C_p\chi} \omega_0^2.$$

§ 35. Очень вязкие жидкости

Для типичных жидкостей уравнения Навье—Стокса применимы до тех пор, пока периоды движения велики по сравнению с молекулярными временами. Это, однако, не относится к очень вязким жидкостям. Для таких жидкостей обычные гидродинамические уравнения становятся неприменимыми уже при гораздо больших периодах движения. Существуют вязкие жидкости, которые в течение достаточно малых (но в то же время больших по сравнению с молекулярными) промежутков времени ведут себя, как твердые тела (например, глицерин, канифоль). Аморфные твердые тела (например, стекло) можно рассматривать как предельный случай таких жидкостей с весьма большой вязкостью.

Свойства этих жидкостей могут быть описаны следующим способом (предложенным Максвеллом). В течение малых промежутков времени они упруго деформируются. После прекращения деформации в них остаются напряжения сдвига, затухающие, однако, со временем, так что по истечении достаточно большого промежутка времени никаких внутренних напряжений в жидкости практически не остается. Пусть τ есть порядок величины времени, в течение которого происходит затухание напряжений (τ называют иногда максвелловским временем релаксации). Предположим, что жидкость подвергается воздействию некоторых переменных внешних сил, периодически меняющихся со временем с частотой ω . Если период $1/\omega$ изменения сил велик по сравнению с временем релаксации τ , т. е. $\omega \ll 1$, то рассматриваемая жидкость будет вести себя, как обычная вязкая жидкость. Напротив, при достаточно больших частотах ω (когда $\omega \gg 1$) жидкость будет вести себя, как аморфное твердое тело.

Соответственно таким «промежуточным» свойствам рассматриваемых жидкостей их можно характеризовать одновременно коэффициентом вязкости η и некоторым «модулем сдвига» μ . Легко получить соотношение, связывающее друг с другом порядки величин η , μ и времени релаксации τ . При воздействии периодических сил с достаточно малой частотой, когда жидкость ведет себя, как обычная, тензор напряжений определяется обычным выражением для вязких напряжений в жидкости, т. е.

$$\sigma_{ik} = 2\eta \dot{\epsilon}_{ik} = -2i\eta\omega u_{ik}.$$