Малые же значения ξ соответствуют почти изотермическим условиям; в этом случае

$$\omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{ET\alpha^2}{18C_p}\right) \approx \omega_0 (E/E_{\text{ад}})^{1/2},$$

а коэффициент затухания

$$\beta = \frac{ET^2\alpha^2h^2}{180C_p\chi}\omega_0^2.$$

§ 35. Очень вязкие жидкости

Для типичных жидкостей уравнения Навье—Стокса применимы до тех пор, пока периоды движения велики по сравнению с молекулярными временами. Это, однако, не относится к очень вязким жидкостям. Для таких жидкостей обычные гидродинамические уравнения становятся неприменимыми уже при гораздо бо́льших периодах движения. Существуют вязкие жидкости, которые в течение достаточно малых (но в то же время больших по сравнению с молекулярными) промежутков времени ведут себя, как твердые тела (например, глицерин, канифоль). Аморфные твердые тела (например, стекло) можно рассматривать как предельный случай таких жидкостей с весьма большой вязкостью.

Свойства этих жидкостей могут быть описаны следующим способом (предложенным *Максвеллом*). В течение малых промежутков времени они упруго деформируются. После прекращения деформации в них остаются напряжения сдвига, затухающие, однако, со временем, так что по истечении достаточно большого промежутка времени никаких внутренних напряжений в жидкости практически не остается. Пусть τ есть порядок величины времени, в течение которого происходит затухание напряжений (τ называют иногда максвелловским временем релаксации). Предположим, что жидкость подвергается воздействию некоторых переменных внешних сил, периодически меняющихся со временем с частотой ω. Если период $1/\omega$ изменения сил велик по сравнению с временем релаксации τ, т. е. $\omega\tau \ll 1$, то рассматриваемая жидкость будет вести себя, как обычная вязкая жидкость. Напротив, при достаточно больших частотах ω (когда $\omega\tau \gg 1$) жидкость будет вести себя, как аморфное твердое тело.

Соответственно таким «промежуточным» свойствам рассматриваемых жидкостей их можно характеризовать одновременно коэффициентом вязкости η и некоторым «модулем сдвига» μ. Легко получить соотношение, связывающее друг с другом порядки величин η, μ и времени релаксации τ. При воздействии периодических сил с достаточно малой частотой, когда жидкость ведет себя, как обычная, тензор напряжений определяется обычным выражением для вязких напряжений в жидкости, т. е.

$$\sigma_{ik} = 2\eta\dot{u}_{ik} = -2i\eta\omega u_{ik}.$$

В обратном предельном случае больших частот жидкость ведет себя, как твердое тело, и внутренние напряжения должны определяться по формулам теории упругости, т. е. $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$ (речь идет все время о «деформациях чистого сдвига», так что предполагается, что $u_{ii} = 0$, $\sigma_{ii} = 0$). При частотах порядка $\omega \sim 1/\tau$ напряжения, определяющиеся этими двумя выражениями, должны совпадать по порядку величины. Таким образом, имеем $\eta u/\lambda\tau \sim \sim \mu u/\lambda$, откуда

$$\eta \sim \tau\mu. \tag{35,1}$$

Это и есть искомое соотношение.

Выведем, наконец, уравнение движения, качественно описывающее поведение рассматриваемых жидкостей. Для этого будем исходить из наиболее простого предположения о законе затухания внутренних напряжений (после прекращения движения); именно, будем считать, что оно происходит по простому экспоненциальному закону, чему соответствует уравнение

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} = -\frac{1}{\tau}\sigma_{ik}.$$

С другой стороны, в твердом теле было бы $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$, и потому

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} = 2\mu\frac{du_{ik}}{dt}.$$

Легко видеть, что уравнение

$$\frac{d\sigma_{ik}}{dt} + \frac{1}{\tau}\sigma_{ik} = 2\mu\frac{du_{ik}}{dt} \tag{35,2}$$

приводит к правильным результатам в обоих предельных случаях медленных и быстрых движений, а потому может служить интерполяционным уравнением для промежуточных случаев.

Так, для периодического движения, когда u_{ik} и σ_{ik} зависят от времени посредством множителя $e^{-i\omega t}$, имеем из (35,2)

$$-i\omega\sigma_{ik} + \frac{1}{\tau}\sigma_{ik} = -2i\omega\mu u_{ik},$$

откуда

$$\sigma_{ik} = \frac{2\mu}{1 + \frac{i}{\omega\tau}} u_{ik}. \tag{35,3}$$

При $\omega\tau \gg 1$ эта формула дает $\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik}$, т. е. обычное выражение для твердых тел, а при $\omega t \ll 1$

$$\sigma_{ik} = -2i\mu\tau\omega u_{ik} = 2\mu\tau\dot{u}_{ik}$$

— обычное выражение для жидкости с вязкостью $\mu\tau$.