откуда с учетом граничных условий

$$\int_0^{\chi} (K_1 \sin^2 \chi + K_2 \cos^2 \chi)^{1/2} d\chi = \frac{z}{h} \int_0^{\pi/2} (K_1 \sin^2 \chi + K_2 \cos^2 \chi)^{1/2} d\chi,$$

или

$$z = hE(\chi, k)/E\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad k^2 = (K_2 - K_1)/K_1,$$

где $E(\chi, k)$ — эллиптический интеграл второго рода.

§ 39. Топологические свойства дисклинаций

Данное в § 37 определение индекса Франка было существенно связано с предположением о плоском характере деформации в дисклинации и однородностью вдоль ее длины. Покажем теперь, каким образом это понятие может быть введено в общем случае произвольных криволинейных дисклинаций в нематической среде.

Энергия нематика не меняется при одновременном произвольном повороте директора во всех его точках. В этом смысле можно сказать, что состояния нематика вырождены по направлениям директора; эти направления играют роль *параметра вырождения*. Введем понятие о *пространстве вырождения* — области допускаемого без изменения энергии изменения параметра вырождения. Им является в данном случае поверхность сферы единичного радиуса, каждая точка которой отвечает определенному направлению **n**. Надо однако учесть еще, что состояния нематика, отличающиеся изменением знака **n** физически тождественны. Другими словами, диаметрально противоположные точки на сфере физически эквивалентны. Таким образом, пространство вырождения нематика — сфера, на которой каждые две диаметрально противоположные точки считаются эквивалентными [1]).

Представим себе, что мы производим в физическом объеме нематика обход вокруг расположенной в нем дисклинационной линии по некоторому замкнутому контуру (назовем его контуром γ). Будем следить при этом обходе за направлением вектора **n**. Изображающая его точка в пространстве вырождения — на сфере — опишет некоторый тоже замкнутый контур (назовем его контуром Γ). Здесь надо различать два случая.

В одном из них контур Γ замкнут в буквальном смысле. Возвращаясь в исходное положение, изображающая точка описывает некоторое целое число n петель (так, для контуров Γ_1 и Γ_2 на рис. 31 это число равно 1 и 2). Это число и является целочисленным индексом Франка.

В другом случае контур Γ, выйдя из некоторой точки на сфере, заканчивается в диаметрально противоположной точке. Такой

[1]) Этому геометрическому образу отвечает в топологии так называемая проективная плоскость.

контур тоже должен рассматриваться как «замкнутый» ввиду эквивалентности диаметрально противоположных точек. Индекс Франка определяется как полуцелое «число петель», описываемых при этом изображающей точкой (так, для полуокружности $\Gamma_{1/2}$ это число $n = 1/2$).

Любой замкнутый контур на поверхности сферы может быть превращен в любой другой замкнутый контур путем непрерывной (т. е. без разрыва контура) деформации. Более того, любой замкнутый контур может быть непрерывным образом стянут в точку [1]).

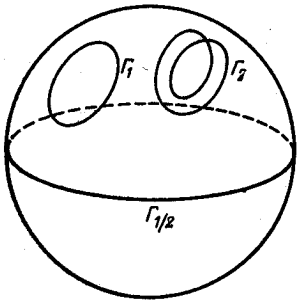

Рис. 31

Также могут быть превращены друг в друга любые контуры, начинающиеся и кончающиеся в диаметрально противоположных точках сферы. Такие контуры, однако, не могут быть стянуты в точку: при деформировании концы контура могут смещаться, но лишь оставаясь при этом на концах какого-либо диаметра сферы.

Таким образом, индекс Франка не является топологическим инвариантом. Топологически инвариантен лишь факт его цело- или полуцелочисленности.

Из сказанного следует, что все дисклинации в нематической среде распадаются на две категории, в каждой из которых все дисклинации топологически эквивалентны — могут быть переведены друг в друга путем непрерывного деформирования поля **n** (**r**) (*С. И. Анисимов, И. Е. Дзялошинской*, 1972). Одну категорию составляют дисклинации с целыми индексами Франка; эти дисклинации к тому же топологически неустойчивы — они могут быть вообще устранены путем непрерывного деформирования. Дисклинация целого индекса может заканчиваться в объеме нематика.

Другую категорию составляют дисклинации с полуцелыми индексами. Эти дисклинации неустранимы, они топологически устойчивы.

Вопрос о том, какая из топологически эквивалентных структур должна фактически осуществиться в тех или иных заданных условиях, зависит от относительной термодинамической выгодности этих структур. Это задача выходит за рамки топологического анализа.

Наряду с линейными особенностями, дисклинациями, в нематической среде могут существовать также и точечные особенности. Простейший пример такой особенности — точка, из которой торчат векторы **n** во все стороны («еж»).

---

[1]) Деформация контура может отражать собой как изменение контура γ в физическом пространстве, так и изменение самого поля **n** (**r**).

Для выяснения топологической классификации точечных особенностей снова обратимся к отображениям в пространстве вырождения на единичную сферу. Выберем в заполненном нематиком физическом пространстве две точки A и B, соединенные некоторым контуром γ, окружающим особую точку 0, как показано на рис. 32. На единичной сфере контуру γ отвечает определенный контур Г. Будем теперь вращать контур γ вокруг прямой AB. После полного оборота, когда контур совместится сам с собой, он опишет в физическом пространстве замкнутую поверхность σ. Ее отображение Σ, описываемое контуром Г, покроет единичную сферу, возможно, более чем один раз. Число N покрытий единичной сферы отображением Σ является топологической характеристикой особой точки. Отображение Σ можно представить себе как натянутую на сферу замкнутую пленку; очевидно, что ее никак нельзя (не производя на ней каких-либо разрезов) стянуть в точку. Этим выражается неустранимость особенности. Если $N = 0$, то пленка вообще не охватывает сферу. Это отвечает отсутствию особенности или ее устранимости — такую пленку можно стянуть в точку. Для особых точек в нематике знак N не имеет смысла: его изменение означает лишь изменение направлений $\mathbf{n}$ во всем пространстве на обратные, что не отражается на состоянии нематика.

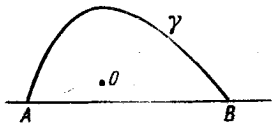

Рис. 32

Число N, характеризующее точечную особенность, может быть только целым. Легко видеть, что полуцелое N означало бы в действительности существование неустранимой линейной, а не точечной особенности. Так, если Σ покрывает половину сферы ($N = 1/2$), то это значит, что, проследив за какой-либо одной точкой на γ, мы найдем, что ее отображение описывает на сфере контур вида $\Gamma_{1/2}$ (рис. 31), что свидетельствовало бы о наличии неустранимой дисклинации с индексом Франка $n = 1/2$ [1]).

В связи с обсуждением топологических свойств особенностей в нематиках остановимся кратко на топологическом истолковании дислокаций — особых линий в кристаллических решетках. Представим себе неограниченную кристаллическую решетку и введем оси x_1, x_2, x_3, направленные вдоль трех основных периодов решетки; величины этих периодов пусть будут a_1, a_2, a_3. Энергия решетки не меняется при ее параллельных сдвигах на любые расстояния вдоль осей x_1, x_2, x_3. Области изменения параметров вырождения (величин сдвигов) — отрезки длины a_1, a_2, a_3, причем у каждого отрезка обе его концевые точки рассматриваются как

[1]) При целом N подобные рассуждения не привели бы к аналогичному выводу, поскольку дисклинация целого индекса устранима, а отображение с целым N отвечает неустранимой особенности.

эквивалентные (поскольку сдвиг на период совмещает решетку саму с собой, т. е. оставляет состояние решетки тождественно неизменным). Отрезок с эквивалентными концами топологически совпадает с окружностью. Таким образом, пространство вырождения кристаллической решетки представляет собой трехмерную область, построенную на трех окружностях. Эту область можно представить себе как куб, противоположные грани которого попарно эквивалентны, или, что то же самое, как трехмерную поверхность тора в четырехмерном пространстве [1]). На таком торе существуют не стягиваемые в точку контуры Г, каждый из которых характеризуется тремя целочисленными топологическими инвариантами n_1, n_2, n_3 — числами обходов трех образующих тор окружностей. Если контур Г — образ контура γ, обходящего в физическом пространстве особую линию (дислокацию), то три его инварианта совпадают с тремя компонентами вектора Бюргерса (измеренными в единицах соответствующих периодов a_1, a_2, a_3). Таким образом, дислокации — топологически устойчивые неустранимые особые линии, а их векторы Бюргерса — топологические инварианты.

§ 40. Уравнения движения нематиков

Состояние движущейся нематической среды определяется распределениями в пространстве четырех величин: директора $\mathbf{n}$, плотности массы ρ, скорости $\mathbf{v}$ и плотности энтропии S. Соответственно этому полная система гидродинамических уравнений движения нематика состоит из четырех уравнений, определяющих производные по времени от указанных величин (*J. L. Eriksen*, 1960; *F. M. Leslie*, 1966) [2]).

Начнем с уравнения для директора. Если нематик находится в равновесии (так что $\mathbf{h} = 0$) и движется как целое с постоянной по пространству скоростью, то это уравнение должно выражать собой просто тот факт, что и значения $\mathbf{n}$ переносятся в пространстве с той же скоростью. Другими словами, каждая жидкая частица перемещается в пространстве со своим значением $\mathbf{n}$. Это выражается равенством нулю полной (или, как говорят, субстанциональной) производной по времени

$$\frac{d\mathbf{n}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{n} = 0. \qquad (40,1)$$

В общем же случае произвольного движения в правой части уравнения появляются члены, зависящие от $\mathbf{h}$ и от производных

[1]) Подобно тому, как квадрат с попарно эквивалентными противоположными сторонами топологически эквивалентен двухмерной поверхности тора в трехмерном пространстве.

[2]) Мы, частично, следуем изложению *D. Forster, T. C. Lubensky, P. C. Martin, J. Swift, P. S. Pershan* (1971).