

Отметим, что это выражение фактически содержит только поперечные (по индексу k) компоненты тензора π_{ik} . Если представить последний в виде

$$\pi_{ik} = \pi_{ik}^{(t)} + \pi_{il} n_k n_l$$

(так что $\pi_{ik}^{(t)} n_k = 0$), то в (40,23) останутся только члены с $\pi_{ik}^{(t)}$.

Наконец, вернемся к членам с полными дивергенциями, которые мы до сих пор не выписывали. Сравнив (40,18) с (40,11), видим, что выражение, стоящее под знаком div в совокупности этих членов, определит собой плотность потока энергии. Приведем здесь получающийся таким образом окончательный результат:

$$\begin{aligned} Q_i = & \left(W + \frac{v^2}{2} \right) v_i - \pi_{ik} \{ -v_l \partial_l n_k + \Omega_{ik} n_l + \lambda n_l (v_{kl} - n_k n_m v_{lm}) \} + \\ & + \frac{1}{2} (n_i h_k - n_k h_i) v_k + \frac{\lambda}{2} (n_i h_k + n_k h_i) v_k - \sigma'_{ik} v_k - \kappa_{ik} \partial_k T, \end{aligned} \quad (40,24)$$

где $W = p + E$ — тепловая функция. Первый член совпадает с выражением потока энергии в гидродинамике обычной жидкости.

§ 41. Диссипативные коэффициенты нематиков

Члены с N и σ'_{ik} в уравнениях движения выражают собой релаксационные процессы, возникающие вследствие термодинамической неравновесности среды; эта неравновесность в свою очередь связана с различными от нуля h и v_{ik} . В обычном гидродинамическом приближении неравновесность предполагается слабой, т. е. величины h , v_{ik} — в определенном смысле малыми. Тогда σ'_{ik} является их линейными функциями.

Однако при принятой нами форме записи уравнений движения зависящих от h членов в σ'_{ik} писать не надо. Действительно, такие члены, составленные из компонент h и n , имели бы вид $\text{const.} (n_i h_k + n_k h_i)$. Но член такого вида уже есть в недиссипативной части тензора напряжений $\sigma_{ik}^{(r)}$ (40,23); добавление подобного члена в σ'_{ik} сводилось бы поэтому лишь к переопределению коэффициента λ .

Общий вид линейной зависимости σ'_{ik} от v_{ik} :

$$\sigma'_{ik} = \eta_{iklm} v_{lm}, \quad (41,1)$$

причем тензор четвертого ранга η_{iklm} обладает очевидными свойствами симметрии (следствиями симметрии тензоров σ'_{ik} и v_{ik})

$$\eta_{iklm} = \eta_{kilm} = \eta_{ikml}. \quad (41,2)$$

Кроме того, этот тензор обладает и более глубокой симметрией, следующей из общего принципа симметрии кинетических коэффициентов Онсагера (см. V, § 120; как и в § 32, ниже в этом параграфе

мы пользуемся формулировкой этого принципа, данной в VI § 59 и введенными там определениями величин x_a и X_a). Из выражения $2R/T$ для скорости увеличения энтропии видно¹⁾, что если под величинами \dot{x}_a понимать компоненты тензора σ'_{ik} , то «термодинамически сопряженными» с ними величинами X_a будут компоненты тензора $-v_{lm}/T$ ²⁾. Компоненты же тензора η_{iklm} играют роль кинетических коэффициентов γ_{ab} . Принцип Онсагера требует равенств $\gamma_{ab} = \gamma_{ba}$, т. е.

$$\eta_{iklm} = \eta_{ilmk}. \quad (41,3)$$

Тензор η_{iklm} должен быть составлен лишь с помощью единичного тензора δ_{ik} и вектора n с учетом указанных свойств симметрии. Имеется всего пять линейно независимых таких комбинаций:

$$\begin{aligned} & n_i n_k n_l n_m, \quad n_i n_k \delta_{lm} + n_i n_m \delta_{lk}, \\ & n_i n_l \delta_{km} + n_k n_l \delta_{im} + n_i n_m \delta_{kl} + n_k n_m \delta_{il}, \\ & \delta_{ik} \delta_{lm}, \quad \delta_{il} \delta_{km} + \delta_{kl} \delta_{lm}. \end{aligned}$$

Соответственно тензор η_{iklm} имеет пять независимых компонент; представим составленный с его помощью тензор напряжений в виде³⁾

$$\begin{aligned} \sigma'_{ik} = & 2\eta_1 v_{ik} + (\eta_2 - \eta_1) \delta_{ik} v_{ll} + \\ & + (\eta_4 + \eta_1 - \eta_2) (\delta_{ik} n_l n_m v_{lm} + n_i n_k v_{ll}) + \\ & + (\eta_3 - 2\eta_1) (n_i n_l v_{kl} + n_k n_l v_{ii}) + \\ & + (\eta_5 + \eta_1 + \eta_2 - 2\eta_3 - 2\eta_4) n_i n_k n_l n_m v_{lm}. \end{aligned} \quad (41,4)$$

Целесообразность именно такого определения всех коэффициентов иллюстрируется следующим выражением диссипативной функции, которое оно принимает при выборе одной из осей координат (оси z) вдоль направления n :

$$\begin{aligned} 2R = & 2\eta_1 \left(v_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} v_{\gamma\gamma} \right)^2 + \eta_2 v_{\alpha\alpha}^2 + 2\eta_3 v_{\alpha z}^2 + 2\eta_4 v_{zz} v_{\alpha\alpha} + \\ & + \eta_5 v_{zz}^2 + \frac{1}{T} \{ \kappa_{||} (\partial_z T)^2 + \kappa_{\perp} (\partial_{\alpha} T)^2 \} + \frac{1}{\gamma} h^2, \end{aligned} \quad (41,5)$$

¹⁾ Напомним, что эта скорость выражается через величины x_a , X_a формулой $2R/T = - \sum_a \dot{x}_a X_a$.

²⁾ В литературе о величинах \dot{x}_a и X_a часто говорят соответственно как о *термодинамических потоках* и *термодинамических силах*.

³⁾ Диссипативные коэффициенты нематиков были введены (в другом виде) Лесли (F. M. Leslie, 1966) и Пароди (O. Parodi, 1970). Общепринятый выбор определений коэффициентов вязкости нематиков в литературе, по-видимому, еще не установленся.

где индексы α, β, γ пробегают два значения x, y . Поскольку должно быть $R > 0$ (энтропия возрастает), то коэффициенты $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_5, \kappa_{\parallel}, \kappa_{\perp}, \gamma$ положительны и, кроме того,

$$\eta_2 \eta_5 > \eta_4^2. \quad (41,6)$$

Таким образом, нематическая среда характеризуется всего девятью кинетическими коэффициентами: пятью коэффициентами вязкости, двумя коэффициентами теплопроводности, коэффициентом γ (тоже имеющим размерность вязкости) и бездиссипативным безразмерным коэффициентом λ .

Число фигурирующих в уравнениях движения коэффициентов вязкости уменьшается в важном случае, когда движущуюся жидкость можно считать несжимаемой (для чего ее скорость должна быть мала по сравнению со скоростью звука). Уравнение непрерывности несжимаемой жидкости сводится к равенству $\operatorname{div} v \equiv \equiv v_{ii} = 0$. В тензоре напряжений (41,4) второй член выпадает вовсе, а третий принимает вид $\operatorname{const.} \delta_{ik} (n_i n_m v_{im})$. Замечаем, что последний член не дает вклада в диссипативную функцию (он выпадает при образовании произведения $\sigma'_{ik} v_{ik}$, поскольку $v_{ik} \delta_{ik} = v_{kk} = 0$). Кроме того, он имеет такую же тензорную структуру, как и член $-p \delta_{ik}$ в полном тензоре напряжений σ_{ik} . Между тем, в гидродинамике несжимаемой жидкости давление выступает (наряду со скоростью) просто как одна из неизвестных функций координат и времени, определяемых в результате решения уравнений движения; оно не является здесь термодинамической величиной, связанной с другими подобными величинами уравнением состояния. Поэтому члены $-p \delta_{ik}$ и $\operatorname{const.} \delta_{ik} (n_i n_m v_{im})$ в тензоре напряжений можно объединить друг с другом, что сводится просто к переопределению давления. Таким образом, вязкий тензор напряжений несжимаемой нематической жидкости сводится к выражению

$$\sigma'_{ik} = 2\eta_1 v_{ik} + (\eta_3 - 2\eta_1) (n_i n_l v_{kl} + n_k n_l v_{il}) + \\ + (\bar{\eta}_2 + \eta_1 - 2\eta_3) n_i n_k n_l n_m v_{lm}, \quad (41,7)$$

(где $\bar{\eta}_2 = \eta_2 + \eta_5 - 2\eta_4$) и содержит всего три независимых коэффициента вязкости. Соответствующая диссипативная функция (ось z вдоль n):

$$2R = 2\eta_1 \left(v_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta} v_{\gamma\gamma} \right)^2 + \bar{\eta}_2 v_{zz}^2 + 2\eta_3 v_{\alpha z}^2 + \\ + \frac{1}{T} \{ \kappa_{\parallel} (\partial_z T)^2 + \kappa_{\perp} (\partial_{\alpha} T)^2 \} + \frac{1}{\gamma} h^2 \quad (41,8)$$

(напомним, что $v_{\alpha\alpha} + v_{zz} = 0$); положительность коэффициента $\bar{\eta}_2$ обеспечивается неравенством (41,6).

Задача

Определить силу, действующую на прямолинейную дисклинацию (с индексом Франка $n = 1$), движущуюся в перпендикулярном ее оси направлении (*H. Imura, K. Okano, 1973*).

Решение. Рассматриваем дисклинацию в системе координат, где она покоится (и совпадает с осью z), а жидкость движется с постоянной скоростью \mathbf{v} вдоль оси x . Распределение $n(\mathbf{r})$ в дисклинации в этой системе стационарно и дается формулами (для дисклинации с радиальными «линиями тока директора», рис. 27, a)

$$n_x = \cos \varphi, \quad n_y = \sin \varphi,$$

где полярный угол $\varphi = \arctg(y/x)$. В уравнении (40,3) имеем $\partial n / \partial t = 0$ и $v_{ik} = 0$ (ввиду однородности потока), так что остается

$$v \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{h}{\gamma}.$$

Отсюда находим для возникающего в результате движения слабого молекулярного поля

$$h = \gamma v [vn] \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

где \mathbf{v} — единичный вектор в направлении оси z (в отсутствие движения молекулярное поле $h = 0$, так как неподвижная дисклинация представляет собой равновесное состояние среды). Диссипативная функция

$$2R = \frac{h^2}{\gamma} = \gamma v^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = \gamma v^2 \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Энергия, диссилируемая в единицу времени (и отнесенная к единице длины линии дисклинации), дается интегралом

$$\int 2R dx dy = \pi \gamma v^2 L, \quad L = \ln(R/a),$$

где R — поперечные размеры области движения, а a — молекулярные размеры. Эта диссипация должна компенсироваться работой vf , совершаемой действующей на дисклинацию силой f . Отсюда находим

$$f = \pi \gamma v L.$$

Для дисклинации с круговыми линиями тока (см. рис. 27, b) получается такой же результат.

§ 42. Распространение малых колебаний в нематиках

Полная система точных уравнений гидродинамики нематиков очень сложна. Она, естественно, упрощается в случае малых колебаний, когда допустима линеаризация уравнений.

Приступая к исследованию распространения малых колебаний в нематических средах, напомним предварительно, какие типы (моды) колебаний существуют в обычных жидкостях. Прежде всего, это обычные звуковые волны с законом дисперсии (связью между частотой ω и волновым вектором \mathbf{k}) $\omega = ck$ и скоростью распространения

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}. \quad (42,1)$$

Колебания в звуковой волне продольны (см. VI, § 64).