

Задача

Определить силу, действующую на прямолинейную дисклинацию (с индексом Франка $n = 1$), движущуюся в перпендикулярном ее оси направлении (*H. Imura, K. Okano, 1973*).

Решение. Рассматриваем дисклинацию в системе координат, где она покоится (и совпадает с осью z), а жидкость движется с постоянной скоростью \mathbf{v} вдоль оси x . Распределение $n(\mathbf{r})$ в дисклинации в этой системе стационарно и дается формулами (для дисклинации с радиальными «линиями тока директора», рис. 27, a)

$$n_x = \cos \varphi, \quad n_y = \sin \varphi,$$

где полярный угол $\varphi = \arctg(y/x)$. В уравнении (40,3) имеем $\partial n / \partial t = 0$ и $v_{ik} = 0$ (ввиду однородности потока), так что остается

$$v \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{h}{\gamma}.$$

Отсюда находим для возникающего в результате движения слабого молекулярного поля

$$h = \gamma v [vn] \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

где \mathbf{v} — единичный вектор в направлении оси z (в отсутствие движения молекулярное поле $h = 0$, так как неподвижная дисклинация представляет собой равновесное состояние среды). Диссипативная функция

$$2R = \frac{h^2}{\gamma} = \gamma v^2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 = \gamma v^2 \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Энергия, диссилируемая в единицу времени (и отнесенная к единице длины линии дисклинации), дается интегралом

$$\int 2R dx dy = \pi \gamma v^2 L, \quad L = \ln(R/a),$$

где R — поперечные размеры области движения, а a — молекулярные размеры. Эта диссипация должна компенсироваться работой vf , совершаемой действующей на дисклинацию силой f . Отсюда находим

$$f = \pi \gamma v L.$$

Для дисклинации с круговыми линиями тока (см. рис. 27, b) получается такой же результат.

§ 42. Распространение малых колебаний в нематиках

Полная система точных уравнений гидродинамики нематиков очень сложна. Она, естественно, упрощается в случае малых колебаний, когда допустима линеаризация уравнений.

Приступая к исследованию распространения малых колебаний в нематических средах, напомним предварительно, какие типы (моды) колебаний существуют в обычных жидкостях. Прежде всего, это обычные звуковые волны с законом дисперсии (связью между частотой ω и волновым вектором \mathbf{k}) $\omega = ck$ и скоростью распространения

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s}. \quad (42,1)$$

Колебания в звуковой волне продольны (см. VI, § 64).

Далее, существуют сильно затухающие вязкие волны с законом дисперсии

$$i\omega = \frac{\eta}{\rho} k^2, \quad (42,2)$$

где η — коэффициент вязкости (см. VI, § 24). Эти волны поперечны (скорость v перпендикулярна вектору k), в связи с чем их часто называют *сдвиговыми*. Они могут иметь два независимых направления поляризации; закон дисперсии от направления поляризации не зависит.

Наконец, в неподвижной жидкости малые колебания температуры (и энтропии) распространяются, как столь же сильно затухающие волны с законом дисперсии

$$i\omega = \chi k^2, \quad (42,3)$$

где χ — температуропроводность среды (см. VI, § 52).

Волны аналогичных типов существуют и в нематических средах. Но наличие у нематиков дополнительной динамической переменной — директора n — приводит к появлению еще и новых, специфических для них типов волн (P. G. de Gennes, 1968).

Начнем с обычного звука в нематиках. Легко видеть, что в пределе достаточно длинных волн (т. е. достаточно малых значений k) поправки к скорости звука, связанные с наличием новой динамической переменной, малы, так что скорость звука дается прежней простой формулой (42,1). Представим директора в колеблющейся среде в виде $n = n_0 + \delta n$, где n_0 — постоянное вдоль среды невозмущенное значение, а δn — малая переменная часть (поскольку $n^2 = n_0^2 = 1$, то $n_0 \delta n = 0$). Сравнение левой стороны уравнения (40,3), с первыми двумя членами в его правой стороне показывает, что $\omega \delta n \sim kv$, т. е. $\delta n \sim v/c$ (член же $N = h/\gamma$ в рассматриваемом приближении является малой величиной более высокого порядка, поскольку, согласно (36,9), молекулярное поле $h \sim k^2$). Поэтому член E_d в плотности энергии жидкости:

$$E_d \sim K (k \delta n)^2 \sim K (vk/c)^2,$$

т. е. имеет порядок k^2 по сравнению с основным членом, который $\sim \rho v^2$. В рассматриваемом приближении этой энергией можно, следовательно, пренебречь, чем и доказывается сделанное выше утверждение о скорости звука.

В следующем по k приближении появляется связанное с диссипативными процессами поглощение звука. Специфика нематика (по сравнению с обычными жидкостями) проявляется в анизотропии этого поглощения — его зависимости от направления распространения звуковой волны (см. задачу 1).

Остальные типы колебаний в нематиках имеют закон дисперсии, подобный (42,2—3): $\omega \sim k^2$. Это значит, что при достаточно малых k во всяком случае будет $\omega \ll ck$. В свою очередь отсюда

следует, что в этих колебаниях жидкость можно рассматривать как несжимаемую¹⁾. Уравнение непрерывности сводится тогда к $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ или для плоской волны $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = 0$. Таким образом, в отношении колебаний скорости рассматриваемые колебания поперечны — сдвиговые колебания.

Для исследования всех этих колебаний произведем линеаризацию уравнений движения, положив в них $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \delta\mathbf{n}$, $\rho = \rho_0 + \delta\rho$. В первом приближении молекулярное поле линейно по производным от \mathbf{n} и тем самым — линейно по $\delta\mathbf{n}$:

$$\mathbf{H} = K_1 \nabla \operatorname{div} \delta\mathbf{n} - K_2 \operatorname{rot} (\mathbf{n}_0 (\mathbf{n}_0 \operatorname{rot} \delta\mathbf{n})) + K_3 \operatorname{rot} [\mathbf{n}_0 [\mathbf{n}_0 \operatorname{rot} \delta\mathbf{n}]]. \quad (42,4)$$

Первый же член в «реактивной» части тензора напряжений (40,16) квадратичен по $\delta\mathbf{n}$ и потому должен быть опущен. Должны быть опущены также и квадратичные члены, возникающие при образовании тензорной дивергенции $\partial_k \sigma_{ik}^{(r)}$ в уравнении (40,7) и член $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$ в его левой стороне. В результате это уравнение сводится к следующему:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\partial_i \delta\rho + \frac{1}{2} (n_{0i} \partial_k h_k - n_{0k} \partial_k h_i) - \frac{\lambda}{2} (n_{0i} \partial_k h_k + n_{0k} \partial_k h_i) + \partial_k \sigma'_{ik}. \quad (42,5)$$

В уравнении же (40,3) достаточно заменить (в первых двух членах в правой стороне) \mathbf{n} на \mathbf{n}_0 и опустить член $(\mathbf{v} \nabla) \delta\mathbf{n}$ в левой стороне:

$$\frac{\partial \delta n_i}{\partial t} = \Omega_{ki} n_{0k} + \lambda (\delta_{ii} - n_{0i} n_{0i}) n_{0k} v_{ki} + \frac{1}{\gamma} h_i. \quad (42,6)$$

Ввиду равенств $\mathbf{n}_0 \delta\mathbf{n} = 0$, $\mathbf{v} \mathbf{k} = 0$ векторы $\delta\mathbf{n}$ и \mathbf{v} имеют всего по две независимые компоненты. Уравнения (42,5—6) составляют поэтому систему четырех линейных уравнений. Ими определяются четыре колебательные моды, в каждой из которых испытывают связанные друг с другом колебания как скорость, так и директор. Обычно, однако, ситуация существенно упрощается ввиду того, что безразмерное отношение

$$\mu = K\rho/\eta^2 \quad (42,7)$$

оказывается малой величиной $\sim 10^{-2}—10^{-4}$ (здесь K и η — порядки величины модулей упругости нематика и его коэффициентов вязкости η_1 , η_2 , η_3 , γ). Как будет показано ниже, при этом можно различать два существенно различных типа колебаний, для каждого из которых уравнения (42,5—6) допускают определенные упрощения.

¹⁾ Напомним (см. VI, § 10), что нестационарно движущуюся жидкость можно считать несжимаемой при условиях $v \ll c$ и $\tau \gg l/c$, где τ и l — промежутки времени и расстояния, на которых скорость жидкости испытывает заметное изменение. Для колебательного движения первое условие всегда выполняется при достаточно малых амплитудах колебаний, а второе условие как раз означает требование $\omega/k \ll c$.

В одном из них частота связана с волновым вектором соотношением вида

$$i\omega \sim \eta k^2/\rho \quad (42,8)$$

аналогичным (42,2) (по причине, которая выяснится ниже, эти колебания называют *быстрыми* сдвиговыми). В обоих уравнениях (42,5–6) можно тогда пренебречь всеми членами, содержащими \mathbf{h} . Действительно, из (42,8) видим, что

$$\delta n \sim kv/\omega \sim \rho v/\eta k,$$

и поэтому молекулярное поле

$$\mathbf{h} \sim Kk^2\delta n \sim \rho v k K/\eta.$$

Используя эти оценки, легко убедиться, что члены с \mathbf{h} в уравнениях малы по сравнению с членами с v_{ik} в отношении $\sim \mu$. Таким образом, система уравнений для быстрых сдвиговых колебаний сводится к

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} = \partial_k \sigma'_{ik} - \partial_i \delta p, \quad (42,9)$$

$$\frac{\partial \delta n_i}{\partial t} = \Omega_{ki} n_{0k} + \lambda (\delta_{ii} - n_{0i} n_{0l}) n_{0k} v_{kl}. \quad (42,10)$$

Первое уравнение не содержит δn и определяет колебания скорости и закон дисперсии, после чего второе уравнение непосредственно дает сопутствующие колебания директора (см. задачу 2).

Перейдем ко второму типу сдвиговых колебаний при условии $\mu \ll 1$ — к специфическим для нематика *медленным* колебаниям директора. В этих колебаниях порядок величины переменной части директора определяется балансом между производной $\partial \delta n / \partial t$ в левой стороне уравнения (42,6) и членом \mathbf{h}/γ в его правой стороне: $\omega \delta n \sim h/\gamma$, и поскольку $h \sim Kk^2\delta n$, закон дисперсии этих колебаний качественно дается соотношением

$$i\omega \sim Kk^2/\gamma. \quad (42,11)$$

Очевидно, что производная $\rho \partial v / \partial t \sim \rho v \omega$ в левой стороне уравнения (42,5) оказывается при этом малой по сравнению с членами $\partial_k \sigma'_{ik} \sim \eta k^2$ в его правой стороне и потому может быть опущена. Уравнение

$$-\partial_i \delta p + \frac{1}{2} (n_{0l} \partial_k h_k - n_{0k} \partial_k h_l) - \frac{\lambda}{2} (n_{0l} \partial_k h_k + n_{0k} \partial_k h_l) + \partial_k \sigma'_{ik} = 0 \quad (42,12)$$

определяет связь между колебаниями скорости и директора, после чего закон дисперсии определяется из уравнения (42,6) (см. задачу 3).

Обратим внимание на то, что отношение частот (42,11) и (42,8) $\omega_m/\omega_b \sim \mu$. Таким образом, при одном и том же значении k частота ω_m мала по сравнению с ω_b ; с этим и связано название соответствующих колебаний *медленными* и *быстрыми*.

Наконец, температурные колебания в неподвижной нематической среде отличаются от аналогичных колебаний в обычной жидкости лишь появлением анизотропии в законе дисперсии, аналогичном (42,3) (см. задачу 4).

Задачи

1. Определить коэффициент поглощения звука в нематической среде.

Решение. Коэффициент поглощения¹⁾ вычисляется как отношение

$$\Gamma = \bar{R}/c\rho v^2$$

(см. § 34), причем диссипативная функция дается формулой (41,5). При этом в ней можно опустить член k^2/γ . Действительно, как уже указано, молекулярное поле $\mathbf{k} \propto k^2$, и потому $k^2/\gamma \propto k^4$, между тем, как остальные члены в R пропорциональны более низкой степени волнового вектора — k^2 . Простое вычисление приводит к следующему результату²⁾:

$$\begin{aligned} \Gamma = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} & \left\{ (\eta_1 + \eta_2) + 2(\eta_3 + \eta_4 - \eta_1 - \eta_2) \cos^2 \theta + \right. \\ & + (\eta_1 + \eta_2 + \eta_5 - 2\eta_3 - 2\eta_4) \cos^4 \theta + \\ & \left. + [x_{\perp} + (x_{\parallel} - x_{\perp}) \cos^2 \theta] \left(\frac{1}{c_p} - \frac{1}{c_0} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где θ — угол между \mathbf{k} (и тем самым \mathbf{v}) и \mathbf{n} . Вычисление теплопроводностной части поглощения полностью аналогично такому же вычислению для обычной жидкости — см. VI, § 79 (c_p , c_0 — теплоемкости единицы массы вещества).

2. Найти закон дисперсии быстрых сдвиговых колебаний.

Решение. Для плоской волны ($\mathbf{v} \propto \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$) уравнение (42,9) принимает вид

$$-i\rho\omega v_i = -ik_i \delta p + ik_k \sigma'_{ik}.$$

Для несжимаемого нематика вязкий тензор напряжений дается формулой (41,7), и простое вычисление (с учетом поперечности \mathbf{v} , $v_{\mathbf{k}} = 0$) приводит уравнение к виду³⁾

$$i\rho\omega v = ik\delta p + a_1 k^2 v + a_2 k^2 n (nv) + a_3 kk (nv), \quad (1)$$

где

$$a_1 = \eta_1 + \frac{1}{2}(\eta_3 - 2\eta_1) \cos^2 \theta,$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(\eta_3 - 2\eta_1) + (\eta_2 + \eta_1 - 2\eta_3) \cos^2 \theta,$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(\eta_3 - 2\eta_1) \cos \theta,$$

где θ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{n} . Умножив уравнение (1) на \mathbf{k} , получим формулу, определяющую колебания давления по колебаниям скорости:

$$\delta p = ik(nv)(a_3 + a_2 \cos \theta). \quad (2)$$

¹⁾ Мы обозначаем здесь эту величину как Γ , во избежание путаницы с диссипативным коэффициентом γ .

²⁾ При вычислении квадратичных величин все колеблющиеся величины должны, конечно, записываться в вещественном виде — их зависимость от t и φ дается множителями $\cos(kr - \omega t)$.

³⁾ Для упрощения записи формул индекс u везде ниже в задачах опускаем.

Искомый же закон дисперсии определяется поперечными компонентами уравнения (1). Умножив это уравнение на $[nk]$, получим закон дисперсии

$$i\omega_{\perp} = \frac{k^2}{\rho} a_1(\theta) = \frac{k^2}{\rho} \left(\eta_1 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \eta_3 \cos^2 \theta \right),$$

отвечающий колебаниям v , перпендикулярным плоскости, проходящей через векторы k и n . Закон же дисперсии для колебаний, поляризованных в указанной плоскости, получится умножением уравнения (1) на n и исключением из него δp с помощью (2):

$$i\omega_{\parallel} = \frac{k^2}{\rho} \{ a_1(\theta) + \sin^2 \theta a_2(\theta) \} = \frac{k^2}{\rho} \left\{ \frac{1}{4} (\eta_1 + \eta_3) \sin^2 2\theta + \frac{1}{2} \eta_3 \cos^2 2\theta \right\}.$$

Оба закона находятся, конечно, в согласии с качественной оценкой (42.8).

3. Найти закон дисперсии медленных сдвиговых колебаний.

Решение. Для плоской волны ($\delta p \propto \exp(ikr - i\omega t)$) линеаризованное молекулярное поле

$$h = H - n(nH) = -K_1(k - n(nk))(k\delta p) - K_2 v(v\delta p) - K_3(kn)^2 \delta p,$$

где

$$v = [nk] (v^2 = k^2 \sin^2 \theta).$$

Уравнение же (42.12) (с σ'_{th} из (41.7)) принимает вид

$$-ik\delta p - a_1 k^2 v - a_2 k^2 n(v) - a_3 k k(nv) + i \frac{1-\lambda}{2} n(kh) - i \frac{1+\lambda}{2} h(nk) = 0 \quad (1)$$

(функции $a_1(\theta)$, $a_2(\theta)$ определены в задаче 2). Умножив его на v , находим связь между колебаниями v и δp , поляризованными перпендикулярно плоскости k , n :

$$a_1(vv) = -i \frac{1+\lambda}{2k^2} (nk)(hv) = i \frac{1+\lambda}{2} (kn) K_{\perp}(v\delta p), \quad (2)$$

где

$$K_{\perp} = K_2 \sin^2 \theta + K_3 \cos^2 \theta.$$

Далее, пишем уравнение (42.6), умноженное на v :

$$-i\omega(v\delta p) = \frac{i}{2} (1 + \lambda) (nk) (vv) - \frac{k^2 K_{\perp}}{\gamma} (v\delta p).$$

Исключив отсюда (vv) с помощью (2), найдем закон дисперсии колебаний, поляризованных перпендикулярно плоскости k , n :

$$\omega_{\perp} = k^2 K_{\perp} \left\{ \frac{1}{\gamma} + \frac{(1+\lambda)^2 \cos^2 \theta}{4a_1} \right\}.$$

Для нахождения закона дисперсии колебаний, поляризованных в плоскости k , n , проецируем уравнение (1) на направление, перпендикулярное вектору k (в плоскости n , k) и умножаем его на n ; это дает

$$(nv)(a_1 + a_2 \sin^2 \theta) = -\frac{i}{2} (1 + \lambda \cos 2\theta) K_{\parallel}(k\delta p),$$

где

$$K_{\parallel} = K_1 \sin^2 \theta + K_3 \cos^2 \theta.$$

Произведя такие же операции с уравнением (42.6), получим

$$i\omega(k\delta p) = \frac{i}{2} k^2 (1 + \lambda \cos 2\theta) (nv) + \frac{k^2}{\gamma} K_{\parallel}(k\delta p).$$

Исключив (пv) из обоих полученных уравнений, найдем закон дисперсии

$$i\omega = k^2 K_{\parallel} \left\{ \frac{1}{\gamma} + \frac{(1 + \lambda \cos 2\theta)^2}{4(a_1 + a_2 \sin^2 \theta)} \right\}.$$

Оба закона находятся в соответствии с качественной оценкой (42,11)¹⁾.

4. Найти закон дисперсии температурных колебаний в неподвижном нематике.

Решение. Преобразование уравнения (40,8) для несжимаемого нематика производится в точности так, как это делается в случае обычной жидкости (см. VI, § 50) и приводит к уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi_{ik} \partial_i \partial_k T, \quad \chi_{ik} = \frac{\kappa_{ik}}{\rho c_p} = \chi_{\parallel} n_i n_k + \chi_{\perp} (\delta_{ik} - n_i n_k).$$

Для колебаний $\delta T \sim \exp(ikr - i\omega t)$ находим закон дисперсии

$$i\omega = k^2 (\chi_{\parallel} \cos^2 \theta + \chi_{\perp} \sin^2 \theta).$$

§ 43. Механика холестериков

Холестерические жидкие кристаллы (*холестерики*) отличаются от нематиков отсутствием среди их элементов симметрии центра инверсии. Направления же n и $-n$ директора по-прежнему остаются эквивалентными (см. V, § 140).

Отсутствие центра симметрии приводит к тому, что свободная энергия деформации может теперь содержать линейный по производным член — псевдоскаляр $n \operatorname{rot} n$. Ее общий вид может быть представлен в виде

$$F_a = \frac{K_1}{2} (\operatorname{div} n)^2 + \frac{K_2}{2} (n \operatorname{rot} n + q)^2 + \frac{K_3}{2} [n \operatorname{rot} n]^2, \quad (43,1)$$

где q — параметр с размерностью обратной длины. Это отличие приводит к радикальному изменению характера равновесного (в отсутствие внешних воздействий) состояния среды. Оно не является теперь пространственно однородным ($n = \text{const}$), как у нематиков.

Равновесному состоянию холестерика отвечает распределение направлений директора, для которого

$$\operatorname{div} n = 0, \quad n \operatorname{rot} n = -q, \quad [n \operatorname{rot} n] = 0 \quad (43,2)$$

(свободная энергия (43,1) минимальна — равна нулю). Эти уравнения имеют решение:

$$n_x = \cos qz, \quad n_y = \sin qz, \quad n_z = 0. \quad (43,3)$$

Эту структуру (ее называют *геликоидальной*) можно представить себе как результат закручивания вокруг оси z нематической среды, первоначально ориентированной своими $n = \text{const}$ в одном направлении в плоскости x, y . Ориентационная структура холестерика оказывается периодической вдоль одного направления в про-

¹⁾ При вещественных k вещественная величина $i\omega$ должна быть положительной — колебания должны затухать (а не самопроизвольно усиливаться) со временем. Все найденные в задачах 2 и 3 законы дисперсии этим свойством обладают.