(поперечная модуляция слоистой структуры). Условие устойчивости структуры состоит в положительности энергии (1). Заменив все интегрируемые множители $\sin^2$, $\cos^2$ их средними значениями 1/2, получим это условие в виде

$$B'\rho_0\left(k_z^2-\gamma k_x^2\right)+K_1k_x^4>0.$$

Граница устойчивости (по мере увеличения γ) определяется появлением вещественного корня k_x^2 трехчлена в левой стороне этого неравенства (комплексные значения k_x не удовлетворяют условию конечности возмущения во всей плоскости x, y). Первое такое появление происходит для возмущения с $n=1$. Для него находим критическое растяжение и соответствующее значение $k_x=k_{\text{кр}}$ [1]):

$$\gamma_{\text{кр}}=\frac{2\pi}{h}\left(\frac{K_1}{\rho_0B'}\right)^{1/2},\quad k_{\text{кр}}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{\rho_0B'}{K_1}\right)^{1/2}.$$

§ 45. Дислокации в смектиках

Понятие дислокации в смектике имеет тот же смысл, что и в обычном кристалле. Разница состоит лишь в том, что ввиду одномерной (вдоль оси z) периодичности микроскопической структуры смектиков вектор Бюргерса дислокации в них всегда направлен по оси z, а по величине равен целому кратному от периода a структуры.

С учетом этого замечания для деформации вокруг дислокации в смектике остается справедливой полученная в § 27 формула (27,10) — при надлежащем определении тензора модулей упругости λ_{iklm}. Для этого введем тензор напряжений в смектике σ_{ik} в соответствии с обычным определением, т. е. по формуле

$$F_z=\partial_k\sigma_{zk},\tag{45,1}$$

где F_z — объемная «сила внутренних напряжений» (44,9). Введем также тензор деформаций, отвечающий смещению $u_z=u$; отличные от нуля его компоненты:

$$u_{zz}=\frac{\partial u}{\partial z},\quad u_{xz}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x},\quad u_{yz}=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}.\tag{45,2}$$

Сила (44,9) может быть представлена в виде (45,1), если выразить тензор напряжений через тензор деформации формулами $\sigma_{ik}=\lambda_{iklm}\sigma_{lm}$ с [2])

$$\lambda_{zzzz}=\rho_0B',\quad \lambda_{zxzx}=\lambda_{zyzy}=-K_1\Delta_\perp,\quad \lambda_{zxzy}=\lambda_{zxxz}=\lambda_{zyyz}=0;\tag{45,3}$$

некоторые из этих компонент — операторы.

---

[1]) Значение $k_{\text{кр}}$ определяет лишь абсолютную величину «волнового вектора» возмущения в плоскости x, y, но не полную симметрию возникающей деформации. Определение последней требует выхода за границы приближения, отвечающего линейным (по δu) уравнениям равновесия (ситуация здесь аналогично той, которая имеет место для конвективной неустойчивости плоскопараллельного слоя жидкости — см. VI, § 57). См. *Delrieu J. M.* — Journ. Chem. Phys., 1974, v. 60, p. 1081.

[2]) Остальные компоненты λ_{iklm} можно выбрать так, чтобы было $F_x=F_y=0$; в формулу (45,4) эти компоненты не входят.

Формула (27,10) для смещения $u_z = u$ принимает вид

$$u(\mathbf{r}) = -\lambda_{zklz} b \int\limits_{S_D} n_l \frac{\partial}{\partial x_k} G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\, df', \tag{45,4}$$

где $G \equiv G_{zz}$ — функция (44,12).

Рассмотрим два частных случая дислокаций — прямолинейные винтовую и краевую. В первом случае ось дислокации совпадает с направлением вектора Бюргерса, т. е. с осью z. Этот случай вообще не требует каких-либо новых вычислений. Заранее ясно, что деформация u будет зависеть только от координат x, y. Но в плоскости x, y среда изотропна. Поэтому можно сразу воспользоваться результатом задачи 2, § 27, согласно которому

$$u = b\varphi/2\pi, \tag{45,5}$$

где φ — полярный угол радиус-вектора в плоскости xy.

Обратимся к более сложному случаю краевой дислокации (*P. G. de Gennes*, 1972). В этом случае ось дислокации перпендикулярна вектору Бюргерса; пусть она совпадает с осью y. Тогда в качестве поверхности S_D в интеграле (45,4) можно взять правую полуплоскость x, y, а вектор $\mathbf{n}$ нормали к ней будет лежать вдоль отрицательного направления оси z. Из всех компонент вида λ_{zkzz} отлична от нуля только $\lambda_{zzzz} = B'\rho_0$, так что формула (45,4) принимает вид

$$u(\mathbf{r}) = bB'\rho_0 \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\partial G(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{\partial z}\, dx'\, dy'.$$

Подставляем сюда функцию G из (44,12). Дифференцирование по z дает множитель ik_z, интегрирование по dy дает $2\pi\delta(k_y)$, δ-функция устраняется затем интегрированием по dk_y. В интеграле

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ik_x x'}\, dx'$$

для обеспечения сходимости надо понимать k_x как $k_x - i0$. Таким образом, после выполнения интегрирований по $dx'dy'dk_y$ получаем

$$u(\mathbf{r}) = -b \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ik_x x)}{k_x - i0} I(k_x, z) \frac{dk_x}{2\pi},$$

где

$$I(k_x, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{k_z \exp(ik_z z)}{k_z^2 + \lambda^2 k_x^4} \frac{dk_z}{2\pi}, \quad \lambda^2 = \frac{K_1}{B'\rho_0}.$$

Последний интеграл вычисляется путем замыкания контура интегрирования бесконечно удаленной полуокружностью в верх-

ней (при $z > 0$) или нижней (при $z < 0$) полуплоскости комплексной переменной k_z и взятия вычета в полюсе $k_z = i\lambda k_x^2$ или $k_z = -i\lambda k_x^2$:

$$I = \pm \frac{i}{2} \exp(-\lambda k_x^2 |z|),$$

где верхний или нижний знак относятся соответственно к $z > 0$ и $z < 0$. Таким образом, смещение

$$u(x, z) = \pm \frac{b}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\lambda k_x^2 |z| + ik_x x\} \frac{dk_x}{k_x - i0}. \quad (45,6)$$

Более интересно, однако, не само смещение, а его производные по координатам. Для производной по x имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \pm \frac{b}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\lambda k_x^2 |z| + ik_x x\} dk_x =$$

$$= \pm \frac{b}{4(\pi\lambda|z|)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\lambda|z|}\right\}. \quad (45,7)$$

Согласно (45,6) производная по z связана с производными по x формулой

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \pm \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{bx}{8(\pi\lambda)^{1/2}|z|^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\lambda|z|}\right\}. \quad (45,8)$$

Деформация быстро (экспоненциально) стремится к нулю при $|x| \to \infty$ и гораздо медленнее (по степенному закону) при $|z| \to \infty$.

§ 46. Уравнения движения смектиков

Механика смектиков имеет то общее с механикой нематиков, что в обоих случаях речь идет о гидродинамике с дополнительными (по сравнению с обычной жидкостью) переменными. В случае нематиков этой переменной является директор **n**, а в случае смектиков — смещение u слоев (*P. C. Martin, O. Parodi, P. S. Pershan*, 1972). Последнее требует пояснения. Скорость определяется в гидродинамике как импульс единицы массы вещества. Ее компонента v_z отнюдь не обязана совпадать в данном случае с производной $\partial u/\partial t$. Перенос массы (в направлении оси z) может осуществляться в смектике не только за счет деформирования слоев, но и путем «просачивания» вещества сквозь остающуюся неподвижной одномерную структуру (подобно описанному в § 43 аналогичному эффекту в холестериках). Это явление не специфично для жидких кристаллов, аналогичное явление воз-