ней (при $z > 0$) или нижней (при $z < 0$) полуплоскости комплексной переменной k_z и взятия вычета в полюсе $k_z = i\lambda k_x^2$ или $k_z = -i\lambda k_x^2$:

$$I = \pm \frac{i}{2} \exp(-\lambda k_x^2 |z|),$$

где верхний или нижний знак относятся соответственно к $z > 0$ и $z < 0$. Таким образом, смещение

$$u(x, z) = \pm \frac{b}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\lambda k_x^2 |z| + ik_x x\} \frac{dk_x}{k_x - i0}. \quad (45,6)$$

Более интересно, однако, не само смещение, а его производные по координатам. Для производной по x имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \pm \frac{b}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\lambda k_x^2 |z| + ik_x x\} dk_x =$$

$$= \pm \frac{b}{4(\pi\lambda|z|)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\lambda|z|}\right\}. \quad (45,7)$$

Согласно (45,6) производная по z связана с производными по x формулой

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \pm \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{bx}{8(\pi\lambda)^{1/2}|z|^{3/2}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4\lambda|z|}\right\}. \quad (45,8)$$

Деформация быстро (экспоненциально) стремится к нулю при $|x| \to \infty$ и гораздо медленнее (по степенному закону) при $|z| \to \infty$.

§ 46. Уравнения движения смектиков

Механика смектиков имеет то общее с механикой нематиков, что в обоих случаях речь идет о гидродинамике с дополнительными (по сравнению с обычной жидкостью) переменными. В случае нематиков этой переменной является директор **n**, а в случае смектиков — смещение u слоев (*P. C. Martin, O. Parodi, P. S. Pershan*, 1972). Последнее требует пояснения. Скорость определяется в гидродинамике как импульс единицы массы вещества. Ее компонента v_z отнюдь не обязана совпадать в данном случае с производной $\partial u/\partial t$. Перенос массы (в направлении оси z) может осуществляться в смектике не только за счет деформирования слоев, но и путем «просачивания» вещества сквозь остающуюся неподвижной одномерную структуру (подобно описанному в § 43 аналогичному эффекту в холестериках). Это явление не специфично для жидких кристаллов, аналогичное явление воз-

можно и в твердых кристаллах, где оно связано с диффузией дефектов (см. примечание на с. 124). Но в смектиках оно в принципе неустранимо ввиду бо́льшей «размытости» периодической структуры (как бы содержащей значительное число дефектов — вакансий) и бо́льшей подвижности молекул.

При адиабатическом движении каждый элемент жидкости переносит свое постоянное значение энтропии s (отнесенной к единице массы); если в какой-либо начальный момент времени энтропия s была постоянна по всему объему среды, она останется постоянной и в дальнейшем. Поскольку условие $s = \text{const}$ справедливо именно для энтропии единицы массы, будет удобным относить сначала к единице массы также и внутреннюю энергию среды; обозначим ее через ε. Для деформированного смектика эта величина выражается формулой, аналогичной (44,1):

$$\varepsilon_d = \varepsilon - \varepsilon_0(s) = \frac{A}{2\rho_0^2}(\rho-\rho_0)^2 + \frac{C}{\rho_0}(\rho-\rho_0)\frac{\partial u}{\partial z} + \\ + \frac{B}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{K_1}{2\rho_0}(\Delta_\perp u)^2, \quad (46,1)$$

где ρ_0 — плотность недеформированной среды; коэффициенты A, B, C здесь не совпадают с таковыми в (44,1) — они представляют собой теперь адиабатические значения модулей упругости (и предполагаются выраженными в функции от s), а не изотермические, как в (44,1); что касается коэффициента K_1, то его изотермическое и адиабатическое значения совпадают по тем же причинам, что и для нематиков (см. конец § 36) [1]).

Единица массы вещества занимает объем $1/\rho$. Поэтому термодинамическое соотношение для дифференциала энергии:

$$d\varepsilon = T\,ds - p\,dV = T\,ds + \frac{p}{\rho^2}\,d\rho.$$

Давление в среде можно, следовательно, найти дифференцированием выражения (46,1)

$$p = \rho^2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s \approx A(\rho-\rho_0) + \rho_0 C\frac{\partial u}{\partial z}. \quad (46,2)$$

Дальнейшее построение уравнений движения смектиков очень близко по используемой последовательности операций произведенному в § 40 выводу уравнений движения нематиков. Для усиления этой аналогии снова (как и в § 40) будем пользоваться

---

[1]) Строго говоря, в (46,1) надо было бы писать $\partial u/\partial z - \delta_0(s)$ вместо $\partial u/\partial z$, где $\delta_0(s)$ — значение $\partial u/\partial z$ в отсутствие внешних сил при энтропии s. Рассматривая движение при заданном s, мы можем выбрать в качестве недеформированного именно это состояние и положить $\delta_0(s) = 0$. Подчеркнем, однако, что после этого уже нельзя, например, дифференцировать выражение (46,1) по s с целью определения температуры по формуле $T = (\partial\varepsilon/\partial s)_\rho$!

энергией $E = \rho\varepsilon$ и энтропией $S = \rho s$, отнесенными к единице объема.

Уравнение непрерывности имеет обычный вид [1])

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{46,3}$$

Динамическое уравнение для скорости должно иметь вид

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = \partial_k\sigma_{ik} \tag{46,4}$$

(ср. (40,7)); вид тензора напряжений будет установлен ниже.

Еще одно уравнение связано с наличием дополнительной переменной и выражает собой отличие v_z от $\partial u/\partial t$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - v_z = N. \tag{46,5}$$

Величина N представляет собой скорость «просачивания» — скорость жидкости относительно одномерной решетки; она имеет кинетическую природу, и ее выражение будет установлено ниже.

Наконец, уравнение для энтропии, учитывающее диссипативные процессы в среде, имеет вид (40,8)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div}\left(S\mathbf{v} + \frac{\mathbf{q}}{T}\right) = \frac{2R}{T}. \tag{46,6}$$

Как и в § 40, вычисляем производную по времени от полной энергии единицы объема среды, фигурирующую в уравнении закона сохранения энергии (40,11). Отличие возникает только в виде последнего члена в (40,12). Имеем теперь [2])

$$\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho,S} = \left(\frac{\partial E_d}{\partial(\partial_z u)}\right)_{\rho,S}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial t} + K_1(\Delta_\perp u)\left(\Delta_\perp\frac{\partial u}{\partial t}\right) =$$
$$= -h\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\{\cdots\} \tag{46,7}$$

(как и в § 40, члены с полными дивергенциями не выписываем), где введено обозначение

$$h = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial E_d}{\partial(\partial_z u)}\right)_{\rho,S} - K_1\Delta_\perp^2 u = \rho_0 B\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + C\frac{\partial(\rho-\rho_0)}{\partial z} - K_1\Delta_\perp^2 u. \tag{46,8}$$

Если рассматривать h как z-компоненту векторной величины $\mathbf{h} = \mathbf{n}h$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор вдоль оси z), то легко убедиться, что этот вектор может быть представлен в виде дивергенции

$$h_i = \partial_k\sigma_{ik}^{(r)}, \tag{46,9}$$

---

[1]) Хотя мы интересуемся в конечном счете лишь линеаризованными уравнениями движения, мы не производим линеаризации на каждом этапе выводов, так как это усложнило бы запись формул.

[2]) Здесь и ниже изменением модулей упругости вдоль среды пренебрегаем.

где симметричный тензор $\sigma_{ik}^{(r)}$ имеет следующие компоненты:

$$\sigma_{xx}^{(r)} = \sigma_{yy}^{(r)} = K_1\Delta_\perp \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \sigma_{zz}^{(r)} = \rho_0 B \frac{\partial u}{\partial z} + C(\rho - \rho_0),$$
$$\sigma_{xz}^{(r)} = -K_1\Delta_\perp \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_{yz}^{(r)} = -K_1\Delta_\perp \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \sigma_{xy}^{(r)} = 0. \tag{46,10}$$

Подставив в (46,7) $\partial u/\partial t$ из уравнения (46,5) и снова выделив в одном из членов полную дивергенцию, пишем

$$\left(\frac{\partial E_d}{\partial t}\right)_{\rho, s} = -hN - v_i\,\partial_k\sigma_{ik}^{(r)} + \operatorname{div}\{\cdots\} =$$
$$= -hN + v_{ik}\sigma_{ik}^{(r)} + \operatorname{div}\{\cdots\}.$$

Это выражение отличается от (40,17) лишь смыслом обозначений h и N [1]). Поступая далее также, как это было объяснено в § 40, получим прежнее выражение (40,21) для диссипативной функции

$$2R = \sigma'_{ik}v_{ik} + Nh - \frac{\mathbf{q}}{T}\nabla T, \tag{46,11}$$

где σ'_{ik} — вязкая часть тензора напряжений:

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} + \sigma_{ik}^{(r)} + \sigma'_{ik}. \tag{46,12}$$

Динамическое уравнение (46,4) с этим тензором напряжений принимает после линеаризации (опускаем член $(\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v}$) вид

$$\rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\partial_i p + h_i + \partial_k\sigma'_{ik}, \tag{46,13}$$

где вектор $\mathbf{h} = \mathbf{n}h$ определен выражением (46,8).

Вязкий тензор напряжений σ'_{ik}, тепловой поток $\mathbf{q}$ и скорость просачивания N («термодинамические потоки») обычным образом представляются выражениями, линейными по «термодинамическим силам» — v_{ik}/T, $T^{-2}\,\partial_i T$, $-h/T$, причем коэффициенты в этих выражениях связаны друг с другом соотношениями, следующими из принципа Онсагера. Не повторяя заново соответствующих рассуждений (ср. §§ 41, 43), напишем результат. При этом будем считать, что (как это обычно имеет место) смектик обладает центром инверсии (до сих пор это еще не предполагалось). Тогда вязкий тензор напряжений дается той же формулой (41,4), что и для нематиков, причем под $\mathbf{n}$ следует понимать направление оси z. Тепловой поток и скорость просачивания даются выражениями

$$q_z = -\varkappa_\parallel \frac{\partial T}{\partial z} + \mu h, \quad \mathbf{q}_\perp = -\varkappa_\perp \nabla_\perp T, \quad N = \lambda_p h - \frac{\mu}{T}\frac{\partial T}{\partial z}, \tag{46,14}$$

---

[1]) А также отсутствием члена $v_i\,(\partial_i E)$. Такой член, однако, являлся бы в данном случае малой величиной третьего порядка, которой можно пренебречь по сравнению с величинами второго порядка.

причем положительность диссипативной функции требует выполнения неравенств

$$\varkappa_{\parallel},\ \varkappa_{\perp},\ \lambda_p > 0, \quad \mu^2 < T\lambda_p\varkappa_{\parallel}. \tag{46,15}$$

Явление просачивания делает возможным существование в смектиках эффекта, подобного описанному в конце § 43 для холестериков. Если периодическая структура смектика каким-то способом закреплена в пространстве, возможно существование однородного стационарного течения вдоль оси z. Из (46,13) следует, что для такого течения $dp/dz = h$, а из (46,5) с N из (46,14):

$$v_z = -\lambda_p h = -\lambda_p \frac{dp}{dz}. \tag{46,16}$$

К сказанному выше о кинетических коэффициентах смектиков надо сделать важную оговорку. Уже упоминавшаяся в § 45 расходимость флуктуаций в смектиках в особенности сильно проявляется именно в кинетических явлениях, что может существенно изменить их характер [1]).

§ 47. Звук в смектиках

В обычных жидкостях (а также в нематических жидких кристаллах) существует лишь одна ветвь слабозатухающих звуковых колебаний — продольные звуковые волны. В твердых кристаллах и аморфных твердых телах существуют три звуковые (акустические) ветви линейного закона дисперсии колебаний (§§ 22, 23). Одномерные кристаллы — смектики — и здесь занимают промежуточное положение: в них имеются две акустические ветви (*P. G. de Gennes*, 1969). Не интересуясь здесь коэффициентами затухания этих волн, и имея в виду лишь определение скоростей их распространения, пренебрежем в уравнениях движения всеми диссипативными членами. Полная система линеаризованных уравнений движения складывается из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \tag{47,1}$$

(здесь и ниже индекс у ρ_0 опускаем; ρ', p' — переменные части плотности и давления), уравнения (46,5), которое сводится к

$$v_z = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{47,2}$$

— просачивание отсутствует, и динамического уравнения (46,13):

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p' + \mathbf{n}h, \tag{47,3}$$

---

[1]) См. *Кац Е. И., Лебедев В. В.* — ЖЭТФ, 1983, т. 85, с. 2019.