причем положительность диссипативной функции требует выполнения неравенств

$$\varkappa_{\parallel},\ \varkappa_{\perp},\ \lambda_p > 0, \quad \mu^2 < T\lambda_p\varkappa_{\parallel}. \tag{46,15}$$

Явление просачивания делает возможным существование в смектиках эффекта, подобного описанному в конце § 43 для холестериков. Если периодическая структура смектика каким-то способом закреплена в пространстве, возможно существование однородного стационарного течения вдоль оси z. Из (46,13) следует, что для такого течения $dp/dz = h$, а из (46,5) с N из (46,14):

$$v_z = -\lambda_p h = -\lambda_p \frac{dp}{dz}. \tag{46,16}$$

К сказанному выше о кинетических коэффициентах смектиков надо сделать важную оговорку. Уже упоминавшаяся в § 45 расходимость флуктуаций в смектиках в особенности сильно проявляется именно в кинетических явлениях, что может существенно изменить их характер [1]).

§ 47. Звук в смектиках

В обычных жидкостях (а также в нематических жидких кристаллах) существует лишь одна ветвь слабозатухающих звуковых колебаний — продольные звуковые волны. В твердых кристаллах и аморфных твердых телах существуют три звуковые (акустические) ветви линейного закона дисперсии колебаний (§§ 22, 23). Одномерные кристаллы — смектики — и здесь занимают промежуточное положение: в них имеются две акустические ветви (*P. G. de Gennes*, 1969). Не интересуясь здесь коэффициентами затухания этих волн, и имея в виду лишь определение скоростей их распространения, пренебрежем в уравнениях движения всеми диссипативными членами. Полная система линеаризованных уравнений движения складывается из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \tag{47,1}$$

(здесь и ниже индекс у ρ_0 опускаем; ρ', p' — переменные части плотности и давления), уравнения (46,5), которое сводится к

$$v_z = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{47,2}$$

— просачивание отсутствует, и динамического уравнения (46,13):

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p' + \mathbf{n}h, \tag{47,3}$$

---

[1]) См. *Кац Е. И., Лебедев В. В.* — ЖЭТФ, 1983, т. 85, с. 2019.

причем, согласно (46,2),

$$p' = A\rho' + \rho C \frac{\partial u}{\partial z}. \tag{47,4}$$

В выражении (46,8) для h следует опустить член $K_1\Delta_\perp^2 u$, содержащий производные высших порядков, — он оказался бы слишком высокого порядка по волновому вектору k, который для звуковых волн следует рассматривать как малую величину:

$$h = \rho B \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + C \frac{\partial \rho'}{\partial z}. \tag{47,5}$$

В реальных смектиках величины B и C обычно малы по сравнению с A. В этих условиях, которые мы и будем предполагать, природа обеих акустических ветвей в смектиках становится более наглядной.

Если пренебречь в уравнениях движения всеми членами, содержащими малые коэффициенты B и C, то они сведутся к уравнениям движения обычной жидкости с уравнением состояния $p' = A\rho'$, т. е. с сжимаемостью $(\partial p'/\partial \rho')_s = A$. Соответствующие этому случаю колебания представляют собой обычные звуковые волны — продольные волны сжатия и расширения среды. Скорость их распространения

$$c_1 = A^{1/2} \tag{47,6}$$

и (в рассматриваемом приближении) не зависит от направления.

Фазовая скорость c_2 волн второй акустической ветви, как мы увидим, мала по сравнению с c_1: $\omega/k = c_2 \ll c_1$. Поэтому по отношению к этим колебаниям среду можно считать несжимаемой (ср. примечание на стр. 220). Уравнение непрерывности сводится при этом к условию несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$; в (47,5) опускаем второй член, так что уравнение (47,3) принимает вид

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p' + \mathbf{n}\rho B \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{47,7}$$

Продифференцировав z-компоненту этого уравнения по z и подставив в него $v_z = \partial u/\partial t$, получим

$$\rho \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} + \rho B \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2},$$

где $\delta = \partial u/\partial z$. Применив же к уравнению (47,7) операцию div, в силу условия несжимаемости получим

$$\Delta p' = \rho B \frac{\partial^2 \delta}{\partial z^2}.$$

Наконец, исключив из этих двух уравнений p', получим одно уравнение для величины δ:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta\delta = B\left\{-\frac{\partial^4 \delta}{\partial z^4} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\Delta\delta\right\}. \tag{47,8}$$

Зависимость смещения u от координаты z означает, что меняются расстояния a между соседними слоями: $\delta a = (\partial u/\partial z)\, a$ сама же величина $\delta = \partial u/\partial z$ дает относительное изменение этого расстояния. Таким образом, уравнение (47,8) описывает распространение поперечной ($\mathbf{kv} = 0$) волны, в которой испытывают колебания расстояния между слоями при постоянной плотности. Для плоской волны, в которой $\delta \backsim \exp\{i\mathbf{kr} - i\omega t\}$, из (47,8) имеем

$$\omega^2 k^2 = B k_\perp^2 k_z^2,$$

откуда находим скорость

$$c_2 = B^{1/2} \sin\theta \cos\theta, \tag{47,9}$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и осью z. Эта скорость анизотропна, причем обращается в нуль для распространения как вдоль оси z ($\theta = 0$), так и в плоскости x, y ($\theta = \pi/2$). При углах, близких к этим значениям, возрастает роль диссипативных эффектов. (См. задачи 2 и 3 к этому параграфу.)

Задачи

1. Найти фазовые скорости акустических волн в смектиках при произвольном соотношении между модулями A, B, C.

Решение. Продифференцировав уравнение (47,3) по t и исключив производные $\partial\rho'/\partial t$ и $\partial u/\partial t$ с помощью (47,1—2), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = A\nabla \operatorname{div}\mathbf{v} - C\nabla\frac{\partial v_z}{\partial z} + \mathbf{n}\left[-C\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\mathbf{v} + B\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right].$$

Для плоской волны, в которой $\mathbf{v} \backsim \exp(i\mathbf{kr} - i\omega t)$, это уравнение сводится к соотношению

$$-\omega^2\mathbf{v} = -A\mathbf{k}(\mathbf{kv}) + Ck_z v_z + \mathbf{n}\,[Ck_z(\mathbf{kv}) - Bk_z^2 v_z]. \tag{1}$$

Пусть волновой вектор $\mathbf{k}$ расположен в плоскости x, z. Тогда из (1) следует, что и скорость $\mathbf{v}$ находится в той же плоскости, а x- и z-компоненты дают систему двух уравнений

$$v_z\,[c^2 - (A + B - 2C)\cos^2\theta] + v_x\,(C - A)\sin\theta\cos\theta = 0,$$
$$v_z\,(C - A)\sin\theta\cos\theta + v_x\,[c^2 - A\sin^2\theta] = 0,$$

где $c = \omega/k$ — скорость волны, а θ — угол между $\mathbf{k}$ и осью z. Приравняв нулю определитель этой системы, получим дисперсионное уравнение

$$c^4 - c^2\,[A + (B - 2C)\cos^2\theta] + (AB - C^2)\sin^2\theta\cos^2\theta = 0.$$

Бóльший и меньший корни этого квадратного (по c^2) уравнения определяют скорости c_1 и c_2. В частности

$$c_1 = \begin{cases} A^{1/2} & \text{при } \theta = \pi/2, \\ (A + B - 2C)^{1/2} & \text{при } \theta = 0. \end{cases}$$

Скорость же c_2 в этих направлениях обращается в нуль.

2. С учетом диссипации определить закон дисперсии второй акустической ветви при распространении в плоскости слоев ($\nu = \pi/2$).

Решение. В условиях задачи скорость $\mathbf{v}$ направлена по оси z, а все величины зависят от x. Проецируя уравнение (46,13) на ось z, получаем

$$-i\omega\rho v = -K_1 k^4 u + ik\sigma'_{zx}. \tag{2}$$

С помощью (41,7) находим

$$\sigma'_{zx} = \frac{ik\eta_3}{2} v.$$

Легко проверить, что ввиду малости параметра $K_1\rho/\eta_3^2$ (ср. с (42,7)) можно пренебречь левой стороной (2), а эффекты просачивания при малых k несущественны, так что $v = -i\omega u$. Окончательно получаем закон дисперсии:

$$i\omega = \frac{2K_1}{\eta_3} k^2.$$

3. То же для распространения перпендикулярно плоскости слоев ($\vartheta = 0$).

Решение. Условие несжимаемости приводит в этом случае к тому, что $\mathbf{v} = 0$ и движение смектика происходит только путем просачивания. Из (46,5) и (46,14) имеем тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \lambda_p \rho B \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

или

$$i\omega = \lambda_p \rho B k^2.$$

Мы пренебрегли в (46,14) членом с градиентом температуры. Это возможно, если температура релаксирует быстрее, чем смещение u, т. е. если $\chi_\parallel \gg \lambda_p \rho B$. В этом случае, однако, нужно понимать под B изотермический модуль упругости.