осевой линии кольца (это было бы точным для прямого цилиндра). Поэтому потенциал самого кольца

$$\varphi_a = \frac{e}{2\pi b} \oint \frac{dl}{r},$$

где r — расстояние от данной точки поверхности кольца до элемента dl его осевой линии, по которой производится интегрирование. Разобьем интеграл на две части по областям $r < \Delta$ и $r > \Delta$, где Δ — некоторое расстояние, такое, что $a \ll \Delta \ll b$. Тогда при $r < \Delta$ можно считать участок кольца прямым и потому

$$\int\limits_{\Delta > r} \frac{dl}{r} = \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} \frac{dl}{\sqrt{l^2 + a^2}} \approx 2 \ln \frac{2\Delta}{a}.$$

В области же $r > \Delta$ можно пренебречь толщиной провода, т. е. считать просто расстоянием между двумя точками осевой линии кольца. Тогда

$$\int\limits_{r > \Delta} \frac{dl}{r} = 2 \int\limits_{\varphi_0}^{\pi} \frac{b\, d\varphi}{2b \sin(\varphi/2)} = -2 \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi_0}{4},$$

где φ — центральный угол, на который опирается хорда r, а нижний предел интегрирования определяется из $2b \sin(\varphi_0/2) = \Delta$, откуда $\varphi_0 \approx \Delta/b$. При сложении обеих частей интеграла величина Δ выпадает, и окончательно получаем для емкости кольца $C = e/\varphi_a$ следующее выражение:

$$C = \frac{\pi b}{\ln(8b/a)}.$$

§ 3. Методы решения электростатических задач

Общие методы решения уравнения Лапласа при заданных граничных условиях на тех или иных поверхностях изучаются в соответствующем разделе математической физики, и в нашу цель не входит полное их изложение. Мы ограничимся здесь лишь указанием некоторых более простых приемов и решением ряда типичных задач, имеющих самостоятельный интерес [1]).

Метод изображений. Определение поля, создаваемого точечным зарядом e, расположенным вне проводящей среды, заполняющей полупространство, является простейшим примером применения так называемого метода изображений. Идея этого метода состоит в подборе таких дополнительных фиктивных точечных зарядов, которые вместе с данными зарядами создавали бы поле, для которого поверхность заданного проводника совпадала бы с одной из эквипотенциальных поверхностей поля. В данном случае это достигается введением фиктивного заряда $e' = -e$,

[1]) Решение значительного числа более сложных задач можно найти в книгах: *Смайт В.* Электростатика и электродинамика.— М.: ИЛ, 1954 (*Smythe W. R.* Static and dynamic electricity.— McGraw-Hill, N. Y., 1950); *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений.— М.: Изд. АН СССР, 1948.

расположенного в точке, представляющей собой зеркальное отражение точки e в граничной плоскости проводящей среды. Потенциал поля заряда e и его «изображения» e' равен

$$\varphi = e\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right), \tag{3,1}$$

где r и r' — расстояния точки наблюдения от зарядов e и e'. На граничной плоскости $r = r'$ и потенциал имеет постоянное значение $\varphi = 0$, так что необходимое граничное условие действительно выполняется и (3,1) дает решение поставленной задачи. Отметим, что заряд e притягивается к проводнику с силой $e^2/(2a)^2$ (*сила изображения*), а энергия взаимодействия равна $-e^2/4a$.

Распределение на граничной плоскости поверхностных зарядов, индуцированных точечным зарядом e, дается формулой

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{r=r'} = -\frac{e}{2\pi}\frac{a}{r^3}, \tag{3,2}$$

где a — расстояние от заряда до плоскости. Легко убедиться в том, что полный заряд на этой плоскости равен

$$\int \sigma\, df = -e,$$

как и должно быть.

Общий заряд, индуцированный посторонними зарядами на первоначально не заряженном изолированном проводнике, разумеется, остается равным нулю. Поэтому, если в данном случае проводящая среда (в действительности — проводник больших размеров) изолирована, то надо представлять себе, что одновременно с зарядом $-e$ индуцируется заряд $+e$, который, однако, будучи распределен по поверхности большого тела, имеет исчезающую плотность.

Далее, рассмотрим более сложную задачу о поле, создаваемом точечным зарядом e, находящимся вблизи шарового проводника. Для решения этой задачи воспользуемся следующим результатом, который легко проверить непосредственными вычислениями. Потенциал поля, создаваемого двумя точечными зарядами e и $-e'$,

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r'}$$

обращается в нуль на сферической поверхности радиуса R, центр которой лежит на продолжении прямой, соединяющей точки e и e', на расстоянии l и l' от этих точек, причем l, l', R удовлетворяют равенствам $l/l' = (e/e')^2$, $R^2 = ll'$.

Предположим сначала, что шаровой проводник поддерживается при постоянном потенциале $\varphi = 0$ (шар заземлен). Тогда поле, создаваемое вне шара точечным зарядом e, находящимся на расстоянии l от центра шара (в точке A на рис. 1), будет совпа-

дать с полем, создаваемым системой двух зарядов — данным зарядом e и фиктивным зарядом $-e'$, помещенным внутри шара (точка A') на расстоянии l' от его центра, причем

$$l' = R^2/l, \quad e' = eR/l. \tag{3,3}$$

Потенциал этого поля

$$\varphi = e/r - eR/lr' \tag{3,4}$$

(см. рис. 1). На поверхности шара индуцируется при этом отличный от нуля полный заряд, равный $-e'$. Энергия взаимодействия заряда с шаром равна

$$\mathcal{U} = -\frac{ee'}{2(l-l')} = -\frac{e^2R}{2(l^2-R^2)}, \tag{3,5}$$

и заряд притягивается к шару с силой

$$F = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial l} = -\frac{e^2 lR}{(l^2-R^2)^2}.$$

Если же проводящая сфера поддерживается при равном нулю полном заряде (изолированный незаряженный шар), то надо ввести еще один фиктивный заряд таким образом, чтобы полный индуцированный на поверхности шара заряд оказался равным нулю, причем не должно нарушаться постоянство потенциала на этой поверхности. Это достигается помещением заряда $+e'$ в центр шара. Потенциал искомого поля определится тогда формулой

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r'} + \frac{e'}{r_0}. \tag{3,6}$$

Энергия взаимодействия в этом случае будет

$$\mathcal{U} = \frac{ee'}{2}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l-l'}\right) = -\frac{e^2R^3}{2l^2(l^2-R^2)}. \tag{3,7}$$

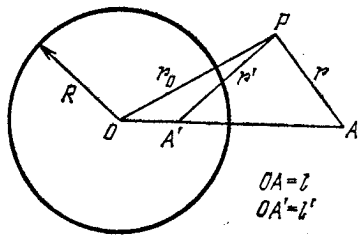

Рис. 1.

Наконец, если заряд e находится в сферической полости в проводящей среде (в точке A', рис. 1), то поле внутри полости совпадает с полем, которое создавалось бы зарядом e и его «изображением» в точке A вне сферы (независимо от того, заземлен проводник или изолирован):

$$\varphi = \frac{e}{r'} - \frac{eR}{l'r}. \tag{3,8}$$

Метод инверсии. Существует простой метод, который в ряде случаев позволяет по известному решению одной электростатической задачи находить решение другой задачи. Основанием этого метода является инвариантность уравнения Лапласа по отношению к определенному преобразованию переменных.

В сферических координатах уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_\Omega\varphi=0,$$

где посредством Δ_Ω обозначена угловая часть оператора Лапласа. Легко убедиться в том, что это уравнение сохраняет свою форму, если вместо переменной r ввести новую переменную r' согласно

$$r=\frac{R^2}{r'} \tag{3,9}$$

(преобразование инверсии) и одновременно заменить неизвестную функцию φ согласно

$$\varphi=\frac{r'}{R}\varphi'. \tag{3,10}$$

Здесь R — некоторая постоянная с размерностью длины *(радиус инверсии)*. Таким образом, если функция $\varphi(\mathbf{r})$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то функция

$$\varphi'(\mathbf{r}')=\frac{R}{r'}\varphi\left(\frac{R^2}{r'^2}\mathbf{r}'\right) \tag{3,11}$$

тоже есть решение этого уравнения.

Предположим, что нам известно решение задачи об электростатическом поле, создаваемом некоторой системой проводников, которые находятся при одном и том же потенциале φ_0, и системой точечных зарядов. Потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ обычно определяют так, чтобы он обращался в нуль на бесконечности. Здесь, однако, мы определим $\varphi(\mathbf{r})$ так, чтобы на бесконечности эта функция стремилась к $-\varphi_0$; тогда на проводниках $\varphi=0$.

Выясним теперь, какая электростатическая задача будет решаться преобразованной функцией (3,11). Прежде всего, меняются фигуры всех протяженных проводников и их взаимное расположение. Граничное условие постоянства потенциала на поверхности проводников автоматически выполняется, так как при $\varphi=0$ будет и $\varphi'=0$. Далее, меняются расположение и величины всех точечных зарядов. Заряд, находящийся в точке $\mathbf{r}_0$, переходит в точку $\mathbf{r}_0'=(R^2/r_0^2)\mathbf{r}_0$ и приобретает величину e', которую можно определить следующим образом. При $\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0$ потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ обращается в бесконечность по закону $\varphi=e/|\delta\mathbf{r}|$, где $\delta\mathbf{r}=\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$. С другой стороны, дифференцируя соотношение $\mathbf{r}=(R^2/r'^2)\mathbf{r}'$, найдем, что абсолютные значения малых разностей $\delta\mathbf{r}$ и $\delta\mathbf{r}'=\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0'$ связаны друг с другом соотношением

$$(\delta\mathbf{r})^2=\frac{R^4}{r_0'^4}(\delta\mathbf{r}')^2.$$

Поэтому при $\mathbf{r}'\to\mathbf{r}_0'$ функция φ' стремится к бесконечности по закону

$$\varphi'=\frac{R}{r_0'}\frac{e}{|\delta\mathbf{r}|}=\frac{er_0'}{R|\delta\mathbf{r}'|},$$

соответствующему заряду

$$e = \frac{er_0'}{R} = \frac{eR}{r_0}. \tag{3,12}$$

Наконец, рассмотрим поведение функции $\varphi'(\mathbf{r}')$ вблизи начала координат. Точке $\mathbf{r}'=0$ соответствует $\mathbf{r}\to\infty$. Но при $\mathbf{r}\to\infty$ функция $\varphi(\mathbf{r})$ стремится к $-\varphi_0$. Поэтому при $\mathbf{r}'\to 0$ функция φ' обращается в бесконечность по закону

$$\varphi' = -\frac{R\varphi_0}{r'}.$$

Это значит, что в точке $r'=0$ находится заряд $e_0 = -R\varphi_0$.

Укажем, как преобразуются при инверсии некоторые геометрические фигуры. Сферическая поверхность радиуса a с центром в точке $\mathbf{r}_0$ дается уравнением

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2 = a^2.$$

Произведя инверсию, получим уравнение

$$\left(\frac{R^2}{r'^2}\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0\right)^2 = a^2,$$

которое после умножения на r'^2 и перегруппировки членов может быть приведено к виду $(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0')^2 = a'^2$, где

$$\mathbf{r}_0' = -\frac{R^2\mathbf{r}_0}{a^2-r_0^2}, \qquad a' = \frac{aR^2}{|a^2-r_0^2|}. \tag{3,13}$$

Таким образом, мы снова получаем сферу другого радиуса a' и с центром в точке $\mathbf{r}_0'$. Если первоначальная сфера проходила через начало координат ($a=r_0$), то $a'=\infty$; в этом случае сфера преобразуется в плоскость, перпендикулярную к направлению $\mathbf{r}_0$ и проходящую на расстоянии

$$r_0' - a' = \frac{R^2}{a+r_0} = \frac{R^2}{2a}$$

от начала координат.

Метод конформного отображения. Поле, зависящее только от двух декартовых координат (x, y), называют *плоским*. Мощным средством для решения плоских задач электростатики является теория функций комплексного переменного. Основания для применения этой теории заключаются в следующем.

Электростатическое поле в пустоте удовлетворяет двум уравнениям: $\operatorname{rot}\mathbf{E}=0$ и $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$. Первое из них позволяет ввести потенциал поля согласно $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. Второе же уравнение показывает, что наряду с φ можно ввести также и «векторный потенциал» поля $\mathbf{A}$ согласно $\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$. В плоском случае вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости xy и зависит только от этих двух координат.

Соответственно, вектор **A** можно выбрать так, чтобы он был везде направлен перпендикулярно к плоскости xy. Тогда компоненты напряженности выражаются в виде производных от φ или **A** согласно

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y}, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial A}{\partial x}. \tag{3,14}$$

Но такие соотношения между производными функций φ и A с математической точки зрения совпадают с известными условиями Коши—Римана, выражающими тот факт, что комплексное выражение

$$w = \varphi - iA \tag{3,15}$$

является аналитической функцией комплексного аргумента $z = x + iy$. Это значит, что функция $w(z)$ имеет в каждой точке определенную производную, не зависящую от направления, в котором она берется. Так, дифференцируя в направлении оси x, найдем, что

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial A}{\partial x},$$

или

$$\frac{dw}{dz} = -E_x + iE_y. \tag{3,16}$$

Функция w называется *комплексным потенциалом*.

Силовые линии поля определяются уравнением

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}.$$

Выражая E_x и E_y через производные от A, перепишем это уравнение в виде

$$dx\frac{\partial A}{\partial x} + dy\frac{\partial A}{\partial y} = dA = 0,$$

откуда $A(x, y) = \text{const}$. Таким образом, линии постоянных значений мнимой части функции $w(z)$ представляют собой силовые линии поля. Линии же постоянных значений ее вещественной части являются эквипотенциальными линиями. Взаимная ортогональность этих двух семейств линий обеспечивается уже исходными соотношениями (3,14), согласно которым

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y} = 0.$$

Как вещественная, так и мнимая части аналитической функции $w(z)$ в равной степени удовлетворяют уравнению Лапласа. Поэтому с тем же успехом можно принять $\operatorname{Im} w$ в качестве потенциала поля. Соответственно силовые линии будут тогда даваться уравнениями $\operatorname{Re} w = \text{const}$. Вместо (3,15) будем при этом иметь $w = A + i\varphi$.

Поток напряженности электрического поля через какой-либо отрезок эквипотенциальной линии дается интегралом

$$\int E_n\,dl = -\int \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dl,$$

где dl есть элемент эквипотенциальной линии, а $\mathbf{n}$ — направление нормали к ней. Согласно соотношениям (3,14) имеем $\partial\varphi/\partial n = -\partial A/\partial l$, причем выбор знака предполагает, что если смотреть в направлении $\mathbf{n}$, то положительное направление l — влево. Поэтому

$$\int E_n\,dl = \int \frac{\partial A}{\partial l}\,dl = A_2 - A_1,$$

где A_2 и A_1 — значения A на обоих концах отрезка. В частности, поток электрического поля через замкнутый контур равен $4\pi e$, где e — полный заряд, охватываемый этим контуром (отнесенный к единице длины проводников вдоль оси z). Поэтому

$$e = \frac{1}{4\pi}\Delta A, \tag{3,17}$$

где ΔA — изменение A при обходе замкнутой эквипотенциальной линии в направлении против часовой стрелки.

Простейшим примером комплексного потенциала является потенциал поля заряженной прямой нити (совпадающей с осью z). Напряженность этого поля дается формулами

$$E_r = \frac{2e}{r}, \quad E_\theta = 0,$$

где r, θ — полярные координаты в плоскости xy, а e — заряд единицы длины нити. Соответствующий комплексный потенциал

$$w = -2e\ln z = -2e\ln r - 2ie\theta. \tag{3,18}$$

Если же заряженная нить проходит не через начало координат, а через точку (x_0, y_0), то комплексный потенциал

$$w = -2e\ln(z - z_0), \tag{3,19}$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$.

С математической точки зрения функциональное соотношение $w = w(z)$ осуществляет *конформное отображение* плоскости комплексного переменного z на плоскость комплексного переменного w. Пусть C есть контур сечения проводника в плоскости xy, а φ_0 — потенциал этого проводника. Из всего сказанного выше ясно, что задача об определении поля, создаваемого этим проводником, сводится к нахождению такой функции $w(z)$, которая отображала бы контур C в плоскости z на линию $w = \varphi_0$, параллельную оси ординат в плоскости w; тогда вещественная часть $\mathrm{Re}\,w$ даст потенциал рассматриваемого поля (если же функция $w(z)$ отображает контур C на линию, параллельную оси абсцисс, то потенциал дается функцией $\mathrm{Im}\,w$).

Задача о клине. Приведем здесь для справок формулы, определяющие поле, создаваемое точечным зарядом e, расположенным в пространстве между двумя пересекающимися проводящими полуплоскостями. Пусть ось z цилиндрической системы координат r, θ, z совпадает с линией края угла, причем угол θ отсчитывается от одной из его сторон; заряд e пусть находится в точке a, γ, 0 (рис. 2). Угол раствора α между плоскостями может быть как меньше, так и больше π; в последнем случае мы имеем дело с зарядом, расположенным вне проводящего клина.

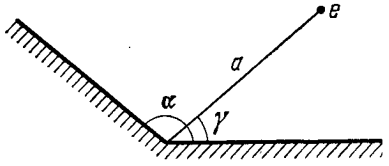

Рис. 2.

Потенциал поля дается формулой

$$\varphi=\frac{e}{\alpha\sqrt{2ar}}\int_{\eta}^{\infty}\left[\frac{\operatorname{sh}(\pi\zeta/\alpha)}{\operatorname{ch}\frac{\pi\zeta}{\alpha}-\cos\frac{\pi(\theta-\gamma)}{\alpha}}-\frac{\operatorname{sh}(\pi\zeta/\alpha)}{\operatorname{ch}\frac{\pi\zeta}{\alpha}-\cos\frac{\pi(\theta+\gamma)}{\alpha}}\right]\frac{d\zeta}{\sqrt{\operatorname{ch}\zeta-\operatorname{ch}\eta}}, \tag{3,20}$$

$$\operatorname{ch}\eta=\frac{a^2+r^2+z^2}{2ar},\quad \eta>0;$$

на поверхности проводника, т. е. при $\theta=0$, α, потенциал $\varphi=0$ (*H. M. Macdonald*, 1895) [1]).

В частности, при $\alpha=2\pi$ получается проводящая полуплоскость в поле точечного заряда. В этом случае интеграл (3,20) вычисляется в конечном виде и дает

$$\varphi|_{\alpha=2\pi}=\frac{e}{\pi}\left[\frac{1}{R}\arccos\left(-\frac{\cos\frac{\theta-\gamma}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\eta}{2}}\right)-\frac{1}{R'}\arccos\left(-\frac{\cos\frac{\theta+\gamma}{2}}{\operatorname{ch}\frac{\eta}{2}}\right)\right], \tag{3,21}$$

$$R=[a^2+r^2+z^2-2ar\cos(\gamma-\theta)]^{1/2},$$
$$R'=[a^2+r^2+z^2-2ar\cos(\gamma+\theta)]^{1/2}.$$

В пределе, когда точка наблюдения поля стремится к точке нахождения заряда e, потенциал (3,21) принимает вид

$$\varphi=\frac{e}{R}+\varphi',\quad \varphi'=-\frac{e}{2\pi a}\left(1+\frac{\pi-\gamma}{\sin\gamma}\right). \tag{3,22}$$

Первый член есть чисто кулоновский потенциал, обращающийся в бесконечность при $R\to 0$, а φ' — изменение потенциала в точке нахождения заряда под влиянием проводника. Энергия

[1]) Вывод этой формулы можно найти в книгах: *Батыгин В. В.*, *Топтыгин И. Н.* Сборник задач по электродинамике.— М.: «Наука», 1970, задачи 205, 206; *Macdonald H. M.* Electromagnetism.— Bell, London, 1934.

взаимодействия заряда с проводящей полуплоскостью есть

$$\mathcal{U}=\frac{e\varphi'}{2}=-\frac{e^2}{4\pi a}\left(1+\frac{\pi-\gamma}{\sin\gamma}\right). \qquad (3,23)$$

Задачи

1. Определить поле вокруг проводящего незаряженного шара (радиуса R), находящегося во внешнем однородном электрическом поле $\mathfrak{E}$.

Решение. Пишем потенциал в виде $\varphi=\varphi_0+\varphi_1$, где $\varphi_0=-\mathfrak{E}\mathbf{r}$ — потенциал внешнего поля, а φ_1 — искомое изменение потенциала, вызываемое шаром. Ввиду симметрии шара функция φ_1 может зависеть лишь от одного постоянного вектора $\mathfrak{E}$. Единственное такое решение уравнения Лапласа, обращающееся в нуль на бесконечности, есть

$$\varphi_1=-\text{const}\cdot\mathfrak{E}\nabla\frac{1}{r}=\text{const}\cdot\frac{\mathfrak{E}\mathbf{r}}{r^3}$$

(начало координат выбираем в центре шара). На поверхности шара φ должно быть постоянным; отсюда находим $\text{const}=R^3$, так что

$$\varphi=-\mathfrak{E}r\cos\theta\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)$$

(θ — угол между векторами $\mathfrak{E}$ и $\mathbf{r}$). Распределение зарядов по поверхности шара дается формулой

$$\sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R}=\frac{3\mathfrak{E}}{4\pi}\cos\theta;$$

полный заряд $e=0$.

Дипольный момент шара проще всего найти путем сравнения φ_1 с потенциалом $\mathcal{P}\mathbf{r}/r^3$ поля электрического диполя; найдем

$$\mathcal{P}=R^3\mathfrak{E}.$$

2. То же для бесконечного цилиндра в поперечном однородном поле.

Решение. Вводим полярные координаты в плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра. Решение двумерного уравнения Лапласа, зависящее только от одного постоянного вектора, есть

$$\varphi_1=\text{const}\cdot\mathfrak{E}\nabla\ln r=\text{const}\cdot\frac{\mathfrak{E}\mathbf{r}}{r^2}.$$

Складывая с $\varphi_0=-\mathbf{r}\mathfrak{E}$ и положив $\text{const}=R^2$, получим

$$\varphi=-\mathfrak{E}r\cos\theta\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right).$$

Поверхностная плотность зарядов

$$\sigma=\frac{\mathfrak{E}}{2\pi}\cos\theta.$$

Дипольный момент $\mathcal{P}$ единицы длины цилиндра можно найти путем сравнения φ с потенциалом двумерного дипольного поля. Последний имеет вид

$$2\mathcal{P}\nabla\ln r=\frac{2\mathcal{P}\mathbf{r}}{r^2},$$

так что $\mathcal{P}=\mathfrak{E}R^2/2$.

3. Определить поле вблизи клиновидного края на проводнике.

Решение. Выбираем полярные координаты r, θ в плоскости, перпендикулярной к краю клина, и с началом в вершине образуемого им угла θ_0 (рис. 3). Угол θ пусть отсчитывается от одной из сторон клина; области вне проводника соответствуют значения $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \theta_0$. Вблизи края угла потенциал можно разложить по степеням r, причем нас интересует первый (после постоянного) член этого разложения, содержащий наиболее низкую степень r.

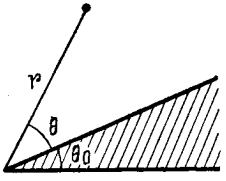

Рис. 3.

Решения двумерного уравнения Лапласа, пропорциональные r^n, суть $r^n \cos n\theta$ и $r^n \sin n\theta$. Решение с наименьшим n, удовлетворяющее условию $\varphi = \text{const}$ при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi - \theta_0$ (на поверхности проводника), есть

$$\varphi = \text{const} \cdot r^n \sin n\theta, \qquad n = \pi/(2\pi - \theta_0).$$

Напряженность поля, соответственно, зависит от r как r^{n-1}. При $\theta_0 < \pi$ ($n < 1$), следовательно, напряженность обращается вблизи края угла в бесконечность. В частности, для очень тонкого клина ($\theta_0 \ll 1$, $n \approx 1/2$) E растет при уменьшении r как $r^{-1/2}$. Вблизи же края клиновидной вогнутости на поверхности проводника ($\theta_0 > \pi$, $n > 1$) поле стремится к нулю.

Значение const может быть определено только из решения задачи для всего поля в целом. Так, для очень тонкого клина в поле точечного заряда e предельный переход к малым r в (3,21) подтверждает закон

$$\varphi = \text{const} \cdot \sqrt{r} \sin\frac{\theta}{2},$$

причем

$$\text{const} = \frac{4e\sqrt{a}}{\pi(a^2+z^2)} \sin\frac{\gamma}{2}.$$

Слова «вблизи клиновидного края» означают в этом случае условие $r \ll a$, при выполнении которого можно пренебречь членом $\partial^2\varphi/\partial z^2$ в уравнении Лапласа.

4. Определить поле вблизи конца тонкого конического острия на поверхности проводника.

Решение. Выбираем сферические координаты с началом в вершине и с полярной осью вдоль оси конического острия. Угол раствора конуса пусть будет $2\theta_0 \ll 1$, так что области вне проводника соответствуют значения полярного угла $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Аналогично тому, как это делалось в предыдущей задаче, ищем решение (для переменной части потенциала), симметричное относительно оси конуса, в виде

$$\varphi = r^n f(\theta) \tag{1}$$

с наименьшим возможным n. Уравнение Лапласа

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) = 0$$

после подстановки этого выражения дает

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{df}{d\theta}\right) + n(n+1)f = 0. \tag{2}$$

Условие постоянства потенциала на поверхности острия означает, что должно быть $f(\theta_0) = 0$.

При малом θ_0 ищем решение, сделав предположение, что $n \ll 1$, а $f(\theta)$ имеет вид $f = \text{const} \cdot [1 + \psi(\theta)]$, где $\psi \ll 1$ (при $\theta_0 \to 0$, т. е. для бесконечно тонкого острия, естественно ожидать, что φ стремится к постоянной почти во всей области вокруг острия). Для ψ получаем уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\psi}{d\theta}\right) = -n. \tag{3}$$

Решение, в котором ψ не имеет особенностей в области вне острия (в частности, при $\theta=\pi$), есть

$$\psi(\theta)=2n\ln\sin\frac{\theta}{2}.$$

При $\theta\sim\theta_0\ll 1$ функция $\psi(\theta)$ перестает быть малой. Тем не менее полученное выражение остается применимым, так как в этой области в силу малости θ можно вообще пренебречь вторым членом уравнения (2). Для определения постоянной n в первом приближении надо потребовать обращения в нуль найденной выше функции $f=1+\psi$ при $\theta=\theta_0$. Таким образом, найдем [1])

$$n=-\frac{1}{2\ln\theta_0}.$$

Напряженность поля неограниченно возрастает при приближении к концу острия как $r^{-(1-n)}$, т. е. в основном как $1/r$.

5. То же для тонкого конического углубления на поверхности проводника.

Решение. Области вне проводника теперь соответствуют значения $0\leqslant\theta\leqslant\theta_0$. Как и в предыдущей задаче, ищем φ в виде (1), но теперь будет $n\gg 1$. Поскольку по всей области поля теперь $\theta\ll 1$, то уравнение (2) можно написать в виде

$$\frac{1}{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\theta\frac{df}{d\theta}\right)+n^2f=0.$$

Это — уравнение Бесселя, и его решение, не имеющее особенностей в области поля, есть $J_0(n\theta)$. Значение n определяется как наименьший корень уравнения $J_0(n\theta_0)=0$, откуда

$$n=2{,}4/\theta_0.$$

6. Определить энергию притяжения электрического диполя к плоской поверхности проводника.

Решение. Выбираем ось x перпендикулярной к поверхности проводника и проходящей через точку нахождения диполя; вектор дипольного момента $\mathcal{P}$ пусть лежит в плоскости xy. «Изображение» диполя находится в точке $-x$ и имеет дипольный момент $\mathcal{P}'_x=\mathcal{P}_x$, $\mathcal{P}'_y=-\mathcal{P}_y$. Искомая энергия притяжения вычисляется как энергия взаимодействия диполя с его «изображением» и равна

$$\mathcal{U}=-\frac{1}{8x^3}(2\mathcal{P}_x^2+\mathcal{P}_y^2).$$

7. Определить взаимную емкость единицы длины двух параллельных бесконечных цилиндрических проводников (радиусов a и b, расстояние между осями c) [2]).

---

[1]) Более точная формула, $n=1/(2\ln(2/\theta_0))$, содержащая коэффициент в большом логарифме, в действительности не может быть получена указанным простым методом. Более точное вычисление, однако, по случайным причинам приводит именно к этой формуле.

[2]) Аналогичная задача для двух сфер не решается в конечном виде. Разница связана с тем, что в поле двух заряженных (равными и противоположными зарядами) параллельных нитей все эквипотенциальные поверхности являются круговыми цилиндрами, а в поле двух точечных зарядов $\pm e$ эквипотенциальные поверхности не являются сферами.

Решение. Поле, создаваемое обоими цилиндрами, совпадает с полем, которое создавалось бы (в пространстве вне цилиндров) двумя заряженными нитями, проходящими через соответствующим образом подобранные точки A и A' (рис. 4). Нити несут (на единице длины) заряды $\pm e$, равные зарядам цилиндров, а точки A и A' должны быть расположены на линии OO' так, чтобы поверхности цилиндров совпадали с эквипотенциальными поверхностями.

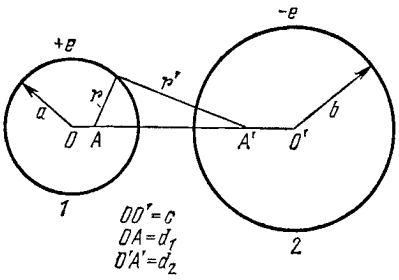

Рис. 4.

Для этого расстояния OA и $O'A'$ должны удовлетворять соотношениям

$$OA\cdot OA'=a^2, \qquad O'A'\cdot O'A=b^2,$$

т. е.

$$d_1(c-d_2)=a^2, \qquad d_2(c-d_1)=b^2.$$

Тогда на каждой из окружностей отношение r'/r расстояний от точек A и A' постоянно: на окружности *1*

$$\frac{r}{r'}=\frac{a}{OA'}=\frac{a}{c-d_2}=\frac{d_1}{a},$$

а на окружности *2* $r'/r=d_2/b$. Соответственно, потенциалы цилиндров:

$$\varphi_1=-2e\ln\frac{r}{r'}=-2e\ln\frac{d_1}{a}, \qquad \varphi_2=2e\ln\frac{d_2}{b}, \qquad \varphi_2-\varphi_1=2e\ln\frac{d_1d_2}{ab}.$$

Отсюда находим для искомой взаимной емкости $C=e/(\varphi_2-\varphi_1)$:

$$\frac{1}{C}=2\ln\frac{d_1d_2}{ab}=2\operatorname{Arch}\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab}.$$

В частности, для цилиндра радиуса a, находящегося на расстоянии $h>a$ от проводящей плоскости, надо положить $c=b+h$ и перейти к пределу $b\longrightarrow\infty$; это дает

$$\frac{1}{C}=2\operatorname{Arch}\frac{h}{a}.$$

Если два полых цилиндра находятся один внутри другого ($c<b-a$), то поле снаружи отсутствует, а поле в пространстве между цилиндрами совпадает с полем, которое создавалось бы двумя нитями с зарядами $+e$ и $-e$, проходящими через точки A и A' (рис. 5). Тем же способом получим результат:

$$\frac{1}{C}=2\operatorname{Arch}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

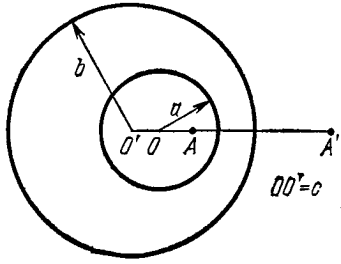

Рис. 5.

8. Граница проводника представляет собой неограниченную плоскость с выступом в виде полушария. Найти распределение зарядов на поверхности.

Решение. В найденном в задаче 1 поле с потенциалом вида

$$\varphi=\text{const}\cdot z\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)$$

плоскость $z=0$ с выступом $r=R$ является эквипотенциальной поверхностью (на которой $\varphi=0$). Поэтому она может быть и поверхностью проводника, а написанная формула определяет поле вне проводника. Распределение

зарядов на плоской части поверхности дается формулой

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0} = \sigma_0\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)$$

(мы положили $\text{const} = -4\pi\sigma_0$, где σ_0 — плотность зарядов вдали от выступа). На поверхности же выступа

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = 3\sigma_0\frac{z}{R}.$$

9. Определить дипольный момент тонкого проводящего цилиндрического стержня (длины $2l$, радиуса a; $a \ll l$) в электрическом поле $\mathcal{E}$, параллельном его оси.

Решение. Пусть $\tau(z)$ — индуцированный на поверхности стержня заряд, отнесенный к единице длины; z — координата вдоль оси цилиндра, которую будем отсчитывать от его середины. Условие постоянства потенциала на поверхности проводника гласит:

$$-\mathcal{E}z + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-l}^{l}\frac{\tau(z')\,dz'\,d\varphi}{R} = 0, \quad R = \left[(z'-z)^2 + 4a^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]^{1/2}$$

(φ — угол между плоскостями, проходящими через ось цилиндра и через точки на его поверхности, расстояние между которыми равно R). Разобьем интеграл на две части, написав в нем тождественно $\tau(z') = \tau(z) + [\tau(z') - \tau(z)]$. Учитывая, что $l \gg a$, и рассматривая точки, не слишком близкие к концам стержня, имеем

$$\frac{\tau(z)}{2\pi}\int\int\frac{dz'\,d\varphi}{R} \approx \frac{\tau(z)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\frac{l^2-z^2}{a^2\sin^2(\varphi/2)}\,d\varphi = \tau(z)\ln\frac{4(l^2-z^2)}{a^2}$$

$$\left(\text{использовано известное значение } \int_0^{\pi}\ln\sin\varphi\,d\varphi = -\pi\ln 2\right).$$

В интеграле, содержащем разность $\tau(z') - \tau(z)$, можно пренебречь членом с a^2 в R, так как это не повлечет за собой расходимости интеграла. Таким образом,

$$\mathcal{E}z = \tau(z)\ln\frac{4(l^2-z^2)}{a^2} + \int_{-l}^{l}\frac{\tau(z')-\tau(z)}{|z'-z|}\,dz'.$$

Зависимость τ от z в основном сводится к пропорциональности z; в этом приближении стоящий здесь интеграл дает $-2\tau(z)$, и в результате получаем

$$\tau(z) = \frac{\mathcal{E}z}{\ln[4(l^2-z^2)/a^2] - 2}.$$

Это выражение непригодно вблизи концов стержня, но для вычисления искомого дипольного момента эта область значений z несущественна. С принятой нами здесь точностью имеем:

$$\mathcal{P} = \int_{-l}^{l}\tau(z)\,z\,dz = \frac{\mathcal{E}}{L}\int_0^{l}\left[z^2 - \frac{z^2}{2L}\ln\left(1-\frac{z^2}{l^2}\right)\right]dz = \mathcal{E}\frac{l^3}{3L}\left[1+\frac{1}{L}\left(\frac{4}{3}-\ln 2\right)\right]$$

(где $L = \ln(2l/a) - 1$ — большое число), или, с той же точностью,

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{E}l^3}{3[\ln(4l/a) - {}^7/_3]}.$$

10. Определить емкость полого сферического проводящего сегмента.

Р е ш е н и е. Выберем начало координат O в какой-либо точке края сегмента (рис. 6) и произведем преобразование инверсии $r = l^2/r'$ (l — длина хорды в главном сечении сегмента). При этом сегмент переходит в полуплоскость (штриховая прямая на рис. 6), перпендикулярную к радиусу AO сегмента и проходящую через точку B его края; угол $\gamma = \pi - \theta$, где 2θ — угол раствора сегмента.

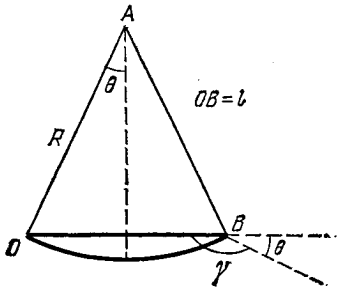

Рис. 6.

Если потенциал сегмента, несущего на себе заряд e, принять за нуль, то при $r \to \infty$ потенциал поля стремится к

$$\varphi \approx -\varphi_0 + \frac{e}{r}.$$

Соответственно, в преобразованной задаче при $r' \to 0$ потенциал стремится к

$$\varphi' = \frac{l\varphi}{r'} \approx -\frac{l\varphi_0}{r'} + \frac{e}{l}$$

(первый член соответствует заряду $e' = -l\varphi_0$ в начале координат).

С другой стороны, согласно (3,22) имеем

$$\varphi' = \frac{e'}{r'} - \frac{e'}{2\pi l}\left(1 + \frac{0}{\sin\theta}\right)$$

(потенциал вблизи заряда e', находящегося на расстоянии l от края проводящей полуплоскости с потенциалом нуль). Сравнив оба выражения, получим для искомой емкости $C = e/\varphi_0$ следующую формулу:

$$C = \frac{l}{2\pi}\left(1 + \frac{\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{R}{\pi}(\sin\theta + \theta)$$

(R — радиус сегмента).

11. Определить связанную с краевыми эффектами поправку к значению $C = S/4\pi d$ для емкости плоского конденсатора (S — площадь поверхности обкладки, d — расстояние между обкладками; $d \ll \sqrt{S}$).

Р е ш е н и е. Наличие у обкладок свободных краев нарушает равномерность распределения зарядов на них. Для определения искомой поправки в первом приближении рассматриваем точки обкладок, удаленные от края на расстояния x такие, что $d \ll x \ll \sqrt{S}$. Рассматривая, например, верхнюю обкладку (с потенциалом $\varphi = \varphi_0/2$; рис. 7, *а*) и пренебрегая ее расстоянием $d/2$ до средней плоскости (эквипотенциальная поверхность $\varphi = 0$), мы получаем задачу о поле вблизи границы двух частей плоскости, имеющих различные потенциалы (рис. 7, *б*). Эта задача решается элементарно [1]), и в результате для избыточной (по сравнению с σ вдали от края) плотности зарядов получается выражение

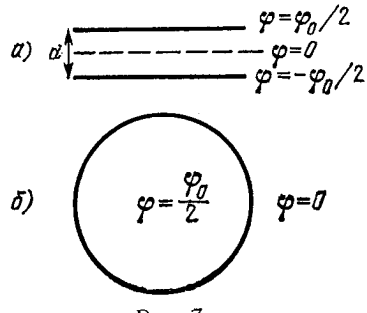

Рис. 7.

$$\Delta\sigma = \frac{E_n}{4\pi} = \frac{\varphi_0}{8\pi^2 x},$$

[1]) См. § 23; в формуле (23,2) для потенциала надо положить в данном случае $\varphi_{ab} = \varphi_0/2$, $\alpha = \pi$.

так что полный избыточный заряд

$$L\int \Delta\sigma\, dx=\frac{\varphi_0 L}{8\pi^2}\ln\frac{\sqrt{S}}{d}$$

(L — длина периметра обкладки); при вычислении логарифмически расходящегося интеграла в качестве верхнего и нижнего пределов подставляем границы области $d\ll x\ll\sqrt{S}$.

Отсюда находим емкость:

$$C=\frac{S}{4\pi d}+\frac{L}{8\pi^2}\ln\frac{\sqrt{S}}{d}.$$

Более точное вычисление (определение коэффициента в аргументе логарифма) требует применения значительно более сложных методов, причем результат зависит от формы обкладок. Для круговых (радиуса R) обкладок получается

$$C=\frac{R^2}{4d}+\frac{R}{4\pi}\left(\ln\frac{16\pi R}{d}-1\right)$$

(*формула Кирхгофа*).

§ 4. Проводящий эллипсоид

Задача об определении поля заряженного проводящего эллипсоида и задача об эллипсоиде во внешнем однородном поле решаются с помощью так называемых *эллипсоидальных* координат.

Связь эллипсоидальных координат с декартовыми дается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1 \qquad (a>b>c). \tag{4,1}$$

Это уравнение, кубическое относительно u, имеет три различных вещественных корня ($u=\xi,\ \eta,\ \zeta$), лежащих в следующих интервалах:

$$\xi\geqslant -c^2,\quad -c^2\geqslant\eta\geqslant -b^2,\quad -b^2\geqslant\zeta\geqslant -a^2. \tag{4,2}$$

Эти три корня и являются эллипсоидальными координатами точки x, y, z. Их геометрический смысл явствует из того, что поверхности постоянных значений ξ, η, ζ представляют собой соответственно эллипсоиды, однополостные гиперболоиды и двухполостные гиперболоиды, причем все они софокусны с эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{4,3}$$

Через каждую точку пространства проходит по одной поверхности этих трех семейств, причем эти поверхности взаимно ортогональны. Формулы преобразования от эллипсоидальных координат к декартовым получаются путем совместного решения трех