Подчеркнем лишний раз, что выражение (80,12) получено в первом приближении по частотам α изменения амплитуды $\mathbf{E}_0(t)$. Поэтому оно справедливо только для полей, амплитуда которых меняется со временем достаточно медленно (это замечание относится также и к вычислению тензора напряжений в следующем параграфе).

§ 81. Тензор напряжений в диспергирующих средах

Представляет существенный интерес также и вопрос о среднем (по времени) тензоре напряжений, определяющем силы, действующие на вещество в переменном электрическом поле. Покажем, что и при наличии дисперсии (но по-прежнему в отсутствие поглощения) выражение для этого тензора не содержит, в отличие от выражения (80,12) для энергии, производных по частоте. В частности, для прозрачной диспергирующей изотропной жидкости в монохроматическом электрическом поле среднее значение $\overline{\sigma}_{ik}$ получается из (15,9) просто заменой ε на $\varepsilon(\omega)$ и произведений E_iE_k, $\mathbf{E}^2$ их средними значениями $\overline{E_iE_k}$, $\overline{\mathbf{E}^2}$ (*Л. П. Питаевский*, 1960).

Для доказательства этого утверждения вернемся к изложенному в § 15 выводу, несколько переформулировав его. Мы рассматривали там заполненный диэлектриком плоский конденсатор и определяли тензор напряжений из условия равенства работы пондеромоторных сил при смещении обкладки изменению соответствующего термодинамического потенциала. Напишем здесь это условие для полных (а не на единицу площади) величин, представив его в виде

$$A\sigma_{ik}\xi_i n_k = (\delta\mathcal{U})_{\mathcal{S},e} \tag{81,1}$$

(A — площадь обкладки конденсатора). Вместо потенциала $\tilde{\mathcal{F}}$ здесь использована обычная энергия $\mathcal{U}$, изменение которой рассматривается при заданных значениях энтропии $\mathcal{S}$ диэлектрика и полных зарядов $\pm e$ на обкладках конденсатора (вместо заданного потенциала φ); использовано, что согласно теореме о малых добавках

$$(\delta\tilde{\mathcal{F}})_{T,\varphi} = (\delta\mathcal{U})_{\mathcal{S},e}.$$

В виде (81,1) это условие имеет особенно простой смысл: теплоизолированный конденсатор с заданными зарядами на обкладках представляет собой электрически замкнутую систему; если же внешний источник производит над ним механическую работу (смещая обкладки), то вся эта работа идет на увеличение энергии конденсатора. Энергия конденсатора:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 + \frac{e^2}{2C}, \tag{81,2}$$

где $\mathcal{U}_0$ — энергия диэлектрика в отсутствие поля (при том же значении энтропии $\mathcal{S}$), а C — емкость конденсатора; для плоского конденсатора $C=\varepsilon A/4\pi h$, где h — расстояние между обкладками. Отсюда:

$$(\delta\mathcal{U})_{\mathcal{S},e}=(\delta\mathcal{U}_0)_{\mathcal{S}}-\frac{e^2}{2C^2}(\delta C)_{\mathcal{S}}. \qquad (81,3)$$

Выразив δC через смещение обкладок ξ (с учетом зависимости ε от плотности диэлектрика, меняющейся при смещении), легко получить формулу (15,9) [1]); ввиду очевидности результата, не будем на этом останавливаться.

При наличии дисперсии выражение для энергии $\mathcal{U}$ меняется. Покажем, что тем не менее соотношение (81,3) остается в силе для средней по времени вариации $\overline{\delta\mathcal{U}}$, а тем самым будет доказано и сделанное выше утверждение об усредненном тензоре напряжений.

Пусть заряд на обкладках конденсатора меняется по монохроматическому закону с частотой ω. Тогда конденсатор сам по себе уже не будет электрически замкнутой системой, ввиду необходимости подводить и отводить заряд. Такой системой, однако, является колебательный контур с собственной частотой ω, состоящий из конденсатора и должным образом подобранной самоиндукции [2]); поэтому для его энергии справедливо соотношение (81,1).

В отсутствие сопротивления разность потенциалов φ на обкладках конденсатора равна сумме внешней электродвижущей силы и электродвижущей силы самоиндукции:

$$\varphi=\mathcal{E}-\frac{1}{c^2}L\frac{dJ}{dt}, \qquad (81,4)$$

а ток J связан с зарядом e на обкладках конденсатора равенством $J=de/dt$. Для величин, меняющихся со временем по монохроматическому закону, по определению емкости $C(\omega)$ имеем $\varphi=e/C(\omega)$. Положив в (81,4) $\mathcal{E}=0$, $J=-i\omega e$, прежде всего найдем, что и при наличии дисперсии емкости собственная частота контура по-прежнему удовлетворяет соотношению Томсона (62,5):

$$\omega=c/\sqrt{LC(\omega)}. \qquad (81,5)$$

Далее, умножив равенство (81,4) на $J=de/dt$ и рассматривая (как при выводе (80,12)) «почти монохроматические» величины, без труда получим:

$$\overline{\mathcal{E}J}=\frac{d}{dt}\left\{\frac{L\overline{J^2}}{2}+\frac{d(\omega C)}{d\omega}\frac{\overline{\varphi^2}}{2}\right\}.$$

---

[1]) При этом она окажется выраженной через другие переменные: вместо изотермических производной $\partial\varepsilon/\partial\rho$ и функции P_0 в ней будут фигурировать адиабатические. Оба выражения, разумеется, эквивалентны.

[2]) Для выполнения условий квазистационарности необходимо, чтобы размеры контура были малыми по сравнению с длиной волны c/ω. Это ограничение, однако, не имеет принципиального характера и не умаляет общности излагаемого вывода.

Из вида этого равенства ясно, что выражение в фигурных скобках представляет собой энергию $\mathcal{U}$ колебательного контура. Первый член в этом выражении преобразуем, подставив $J = -i\omega e$ и используя (81,5):

$$\frac{1}{2c^2} L\overline{J^2} = \frac{1}{2c^2} L\omega^2\overline{e^2} = \frac{1}{2c^2} LC^2\omega^2\overline{\varphi^2} = \frac{C\overline{\varphi^2}}{2}.$$

Окончательно запишем энергию контура в виде[1])

$$\overline{\mathcal{U}} = \frac{1}{\omega}\frac{d(\omega^2 C)}{d\omega}\frac{\overline{\varphi^2}}{2}. \tag{81,6}$$

Нам надо вычислить вариацию этой энергии при малом смещении обкладок конденсатора, т. е. при малом изменении его емкости. В переменном поле это смещение надо представлять себе как происходящее бесконечно медленно. Но при таком изменении остается постоянным адиабатический инвариант, равный (как и для всякой линейной колебательной системы) отношению энергии колебаний к частоте[2]). Таким образом, $\delta(\overline{\mathcal{U}}/\omega) = 0$, т. е.

$$\delta\overline{\mathcal{U}} = \overline{\mathcal{U}}\frac{\delta\omega}{\omega}. \tag{81,7}$$

Из равенства (81,5) имеем, при малом изменении емкости конденсатора:

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\delta C}{2C}. \tag{81,8}$$

Но изменение емкости складывается из двух частей:

$$\delta C = (\delta C)_{\text{ст}} + \frac{dC}{d\omega}\delta\omega. \tag{81,9}$$

Первый член есть «статическая» часть изменения, связанная с деформацией так же, как и в статическом случае (здесь существенно, что при наличии дисперсии емкость $C(\omega)$ выражается через $\varepsilon(\omega)$ так же, как в статическом случае). Второй же член связан просто с изменением частоты. Из (81,8—9) находим для «статической» части

$$(\delta C)_{\text{ст}} = -\frac{1}{\omega^2}\frac{d(\omega^2 C)}{d\omega}\delta\omega. \tag{81,10}$$

При подстановке (81,6) в (81,7) с учетом (81,10) производная $dC/d\omega$ выпадает и вариация энергии получается в виде

$$\delta\overline{\mathcal{U}} = -\frac{\overline{\varphi^2}}{2}(\delta C)_{\text{ст}} = -\frac{\overline{e^2}}{2C^2}(\delta C)_{\text{ст}}, \tag{81,11}$$

---

[1]) Здесь и ниже для упрощения записи формул опускаем в энергии ее «неэлектромагнитную» часть $\mathcal{U}_0$.

[2]) Ср. I § 49. Инвариантность указанной величины особенно наглядна в терминах квантовой теории: отношение $\overline{\mathcal{U}}/\hbar\omega$ есть номер квантового состояния, не меняющийся при адиабатическом изменении условий.

действительно совпадающем с усредненным вторым членом в (81,3).

Заметим, что выпадение членов с производной по ω в $\delta\overline{\mathcal{U}}$ имеет совершенно общий характер и не связано с конкретным способом изменения состояния тела (в данном случае — конденсатора). В частности, для среды с дисперсией остается справедливой (с заменой $\mathbf{E}^2$ на $\overline{\mathbf{E}^2}$) формула (14,1) для изменения свободной энергии при малом изменении ε:

$$\delta\mathcal{F} = -\int \delta\varepsilon(\omega)\frac{\overline{\mathbf{E}^2}}{8\pi}\,dV. \qquad (81,12)$$

Зная тензор напряжений, можно по формуле (75,17) найти силу, действующую на единицу объема диэлектрика. При этом члены, содержащие пространственные производные, совпадут с соответствующими членами усредненного по времени выражения (75,18) (в котором надо положить $\mu = 1$). Член же с производной по времени (сила Абрагама) оказывается другим.

Действительно, этот член возникает как разность

$$\frac{1}{4\pi c}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{DH}] - \frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}]\right\},$$

которая должна быть теперь усреднена по времени. Для этого выражаем $\mathbf{D}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ в комплексном виде (т. е. заменяем их на $(\mathbf{D}+\mathbf{D}^*)/2$ и т. д.), после чего для производной $\partial\mathbf{D}/\partial t$ используем формулу (80,10). В результате получим силу Абрагама в виде

$$\frac{1}{8\pi c}(\varepsilon - 1)\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{EH}^*] + \frac{1}{8\pi c}\,\omega\,\frac{d\varepsilon}{d\omega}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\,\mathbf{H}^*\right] \qquad (81,13)$$

(*Х. Вашина, В. И. Карпман*, 1976).

Вопрос о тензоре напряжений в переменном поле имеет смысл не только для прозрачной, но и для поглощающей среды,— в противоположность вопросу о внутренней энергии, который может быть сформулирован лишь в пренебрежении диссипацией. Есть, однако, основания полагать, что в поглощающей среде тензор напряжений не может быть выражен через одну лишь диэлектрическую проницаемость, а потому вообще не может быть найден в общем виде макроскопическим путем.

§ 82. Аналитические свойства функции $\varepsilon(\omega)$

Функция $f(\tau)$ в (77,3) конечна при всех значениях своего аргумента, в том числе и при $\tau = 0$ [1]). У диэлектриков эта функция стремится при $\tau \to \infty$ к нулю. Это обстоятельство является

[1]) Именно для этой цели в интегральной зависимости (77,3) выделен член $\mathbf{E}(t)$; в противном случае функция $f(\tau)$ имела бы при $\tau = 0$ особенность типа δ-функции.