Поскольку в данном случае $D_x(t)=0$ при $t>0$ (чем выражается отсутствие источников поля при $t>0$), то

$$E_x(t)=\int_{-\infty}^{0} F(t-\tau)\,D_x(\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

Отсюда видно, что при больших t зависимость E_x от времени определяется в основном временной зависимостью функции $F(t)$.

Для монохроматического поля имеем из (3):

$$\frac{1}{\varepsilon(\omega)}=\int_{0}^{\infty} F(\tau)\,e^{i\omega\tau}\,d\tau$$

и, обратно,

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon(\omega)}e^{-i\omega t}\,\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Для оценки этого интеграла при больших значениях t смещаем путь интегрирования в нижнюю полуплоскость ω, где подынтегральное выражение быстро убывает. При этом надо обходить все особые точки функции $1/\varepsilon(\omega)$, т. е. нули функции $\varepsilon(\omega)$ и ее точки ветвления. В результате интеграл будет в основном пропорционален $e^{-i\omega_0 t}$, где ω_0 — ближайшая к вещественной оси из указанных особых точек. Этим и решается поставленный вопрос для продольной части возмущения.

Для поперечных компонент имеем из (1)

$$\frac{1}{c^2}\ddot{D}_{y,z}+k^2E_{y,z}=0.$$

Аналогичное исследование приводит к заключению, что искомая частота ω_0 является в данном случае ближайшим к вещественной оси нулем или точкой ветвления функции

$$\omega^2\varepsilon(\omega)-c^2k^2.$$

§ 84. Прозрачные среды

Применим полученные в § 82 общие формулы к слабопоглощающим (в данной области частот) средам, т. е. будем предполагать, что для этих частот мнимой частью диэлектрической проницаемости можно пренебречь.

В таком случае в формуле (82,8) взятие главного значения становится излишним, так как точка $x=\omega$ фактически выпадает из области интегрирования. После этого интеграл можно дифференцировать по параметру ω, как обычный интеграл, не имеющий особенностей в подынтегральном выражении. Произведя такое дифференцирование, получим

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega}=\frac{4\omega}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{x\varepsilon''(x)\,dx}{(\omega^2-x^2)^2}.$$

Ввиду положительности подынтегрального выражения во всей области интегрирования мы приходим к выводу, что

$$\frac{d\varepsilon(\omega)}{d\omega} > 0, \tag{84,1}$$

т. е. в области отсутствия поглощения диэлектрическая проницаемость — монотонно возрастающая функция частоты.

Аналогичным образом, в той же области частот получается еще и другое неравенство:

$$\frac{d}{d\omega}[\omega^2(\varepsilon - 1)] = \frac{4\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^3\varepsilon''(x)}{(x^2-\omega^2)^2}\,dx > 0,$$

или

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} > \frac{2(1-\varepsilon)}{\omega}. \tag{84,2}$$

Если $\varepsilon < 1$ или даже отрицательна, то это неравенство сильнее неравенства (84,1)[1]).

Отметим, что неравенства (84,1) и (84,2) (и аналогичные — для $\mu(\omega)$) автоматически гарантируют выполнение неравенства $u < c$ для скорости распространения волн. Так, при $\mu = 1$ имеем $n = \sqrt{\varepsilon}$ и, вводя n вместо ε в (84,1) и (84,2), получим

$$\frac{d(n\omega)}{d\omega} > n, \quad \frac{d(n\omega)}{d\omega} > \frac{1}{n}. \tag{84,3}$$

Поэтому для скорости u (83,10) получаются два неравенства: $u < c/n$ и $u < cn$, откуда видно, что $u < c$ как при $n > 1$, так и при $n < 1$. Эти неравенства показывают также, что $u > 0$, т. е. групповая скорость направлена в ту же сторону, что и волновой вектор. Это ее свойство вполне естественно, хотя с чисто логической точки зрения отнюдь не обязательно.

Предположим, что область слабого поглощения простирается в некотором широком интервале частот от ω_1 до ω_2 (причем $\omega_2 \gg \omega_1$), и рассмотрим частоты ω такие, что $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$. Область интегрирования в (82,8) разбивается на две части: $x < \omega_1$ и $x > \omega_2$. В первой из них можно пренебречь в знаменателе подынтегрального выражения x по сравнению с ω, а во второй — ω по сравнению с x:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi}\int_{\omega_2}^\infty \varepsilon''(x)\frac{dx}{x} - \frac{2}{\pi\omega^2}\int_0^{\omega_1} x\varepsilon''(x)\,dx, \tag{84,4}$$

т. е. функция $\varepsilon(\omega)$ в рассматриваемой области имеет вид $a - b/\omega^2$, где a и b — положительные постоянные. Вторую из них можно

[1]) Взяв полусумму неравенств (84,1) и (84,2), найдем, что $d(\omega\varepsilon)/d\omega > 1$ — неравенство более сильное, чем (80,13).

выразить через силу осцилляторов N_1, ответственных за поглощение в области от 0 до ω_1 (ср. (82,12)), и тогда

$$\varepsilon(\omega) = a - \frac{4\pi N_1 e^2}{m\omega^2}. \qquad (84,5)$$

Из этого выражения следует, что в достаточно широкой области слабого поглощения диэлектрическая проницаемость, вообще говоря, проходит через нуль. Напомним в этой связи, что прозрачной в буквальном смысле слова является среда, в которой $\varepsilon(\omega)$ не только вещественно, но и положительно; при отрицательном ε волна затухает в глубь среды, хотя в ней и не происходит истинной диссипации энергии.

Для частоты, при которой $\varepsilon = 0$, индукция $\mathbf{D}$ тождественно обращается в нуль и уравнения Максвелла допускают существование переменного электрического поля, удовлетворяющего одному лишь уравнению $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ при равном нулю магнитном поле. Другими словами, в этом случае возможно существование продольных электрических волн. Для определения скорости их распространения необходимо учитывать дисперсию диэлектрической проницаемости не только по частоте, но и по волновому вектору; мы вернемся к этому вопросу в § 105.

Пусть, наконец, в широкой области прозрачности имеется узкая область («линия») поглощения вокруг некоторой частоты ω_0. Рассмотрим окрестность этой частоты, удовлетворяющую условию

$$\gamma \ll |\omega - \omega_0| \ll \omega_0, \qquad (84,6)$$

где γ—ширина линии. В этой области в подынтегральном выражении в (82,6) можно заменить x на ω_0 везде, кроме быстроменяющейся функции $\varepsilon''(x)$. Тогда получим:

$$\varepsilon(\omega) \approx \varepsilon'(\omega) \approx \frac{1}{\pi(\omega_0 - \omega)} \int \varepsilon''(x)\, dx, \qquad (84,7)$$

где интегрирование производится по линии поглощения.

Задача

На границу полупространства ($x > 0$), заполненного прозрачной средой (с $\mu = 1$), падает в нормальном направлении плоская электромагнитная волна с резко обрывающимся передним фронтом. Определить структуру фронта волны, прошедшей внутрь среды (*A. Sommerfeld, L. Brillouin*, 1914).

Решение. Пусть волна падает на границу среды в момент $t = 0$, так что при $x = 0$ поле падающей волны (E или H)

$$\text{при } t < 0\text{: } E = 0; \quad \text{при } t > 0\text{: } E \sim e^{-i\omega_0 t}.$$

Разлагая это поле в интеграл Фурье по времени, сведем задачу к падению бесконечно протяженных волн различной частоты на ту же границу. Амплитуда компоненты Фурье с частотой ω пропорциональна

$$\int_0^\infty e^{i(\omega-\omega_0)\tau} d\tau.$$

При падении волны с частотой ω прошедшая в среду волна имеет вид

$$a(\omega)\exp\left(-i\omega t+i\frac{\omega}{c}nx\right),$$

где амплитуда $a(\omega)$ — медленно меняющаяся функция частоты. Поэтому в данном случае поле волны в среде

$$E\sim\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\,a(\omega)\exp\left(-i\omega t+i\frac{\omega}{c}nx\right)\int\limits_{0}^{\infty}e^{i(\omega-\omega_0)\tau}\,d\tau.$$

В области вблизи фронта волны в этом интервале играют роль значения ω, близкие к ω_0. Введя новую переменную $\xi=\omega-\omega_0$, заменим $a(\omega)$ на $a(\omega_0)$, а показатель разлагаем по степеням ξ. Опуская все несущественные постоянные и фазовые множители, получим

$$E\sim\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{i\xi\left(\tau-t+\frac{x}{u}\right)-\frac{i\xi^2}{2}x\frac{u'}{u^2}\right\}d\xi\,d\tau,$$

где $u=u(\omega_0)$ — скорость распространения (83,10), а $u'=\left.\frac{du}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}$. Произведя интегрирование по $d\xi$, легко привести E к следующему виду:

$$E\sim\int\limits_{w}^{\infty}e^{\pm i\eta^2}\,d\eta,\qquad w=\frac{x-ut}{\sqrt{2x|u'|}}$$

(знак в показателе зависит от знака u'). Интенсивность же волны вблизи ее фронта распределена по закону

$$I\sim\left|\int\limits_{w}^{\infty}e^{i\eta^2}\,d\eta\right|^2.$$

Эта формула по виду совпадает с формулой, определяющей распределение интенсивности вблизи края тени при дифракции Френеля (см. II § 60). При $w>0$ интенсивность монотонно падает с увеличением w, а при $w<0$ совершает осцилляции с убывающей амплитудой вокруг постоянного значения, к которому стремится при $w\longrightarrow-\infty$.

На больших расстояниях впереди рассмотренного фронта ему предшествуют так называемые «предвестники», распространяющиеся со скоростью c. Они соответствуют компонентам Фурье с большими частотами, для которых $\varepsilon\longrightarrow 1$.