Скорость распространения (групповая скорость) в неподвижной среде получается дифференцированием соотношения $ck = \omega n(\omega)$ и равна

$$\mathbf{u}_0 = \frac{c}{d(n\omega)/d\omega}\,\mathbf{l}. \tag{3}$$

В движущейся среде она получается дифференцированием соотношения (2), которое предварительно переписываем в виде

$$k = \frac{\omega}{c} n + \mathbf{kv}\left(\frac{1}{cn} - \frac{1}{u_0}\right).$$

Снова с точностью до членов первого порядка находим

$$u = u_0 + \mathbf{l}(\mathbf{lv})\left(\frac{u_0}{cn} - \frac{u_0^2}{c^2} - \frac{n\omega}{c}\frac{du_0}{d\omega}\right) + v\left(1 - \frac{u_0}{cn}\right). \tag{4}$$

При распространении света в направлении движения среды ($\mathbf{v} \parallel \mathbf{l}$) имеем отсюда [1])

$$u = u_0 + v\left(1 - \frac{u_0^2}{c^2}\right) - \frac{vn\omega}{c}\frac{du_0}{d\omega}. \tag{5}$$

Первые два члена могут быть получены просто путем применения релятивистской формулы сложения скоростей. Если же $\mathbf{v}$ и $\mathbf{l}$ взаимно перпендикулярны:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}\left(1 - \frac{u_0}{cn}\right). \tag{6}$$

Фазовая скорость волны получается из (2) в виде

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} + \mathbf{vl}\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right).$$

При $\mathbf{v} \perp \mathbf{l}$ эффект первого порядка в ней отсутствует.

§ 86. Отражение и преломление волн

Рассмотрим отражение и преломление монохроматической плоской электромагнитной волны на плоской границе раздела между однородными средами. Падение происходит из прозрачной среды (среда *1*); для второй же среды предположения о прозрачности пока делать не будем. Будем отмечать величины, относящиеся к падающей и отраженной волнам, соответственно индексами 0 и 1, а к преломленной волне — индексом 2 (рис. 46). Направление нормали к плоскости раздела выберем в качестве оси z (с положительным направлением в глубь среды *2*).

Ввиду полной однородности в плоскости xy, зависимость решения уравнений поля от этих координат во всем пространстве должна быть одинаковой. Это значит, что компоненты k_x, k_y волнового вектора для всех трех волн одинаковы. Отсюда сле-

---

[1]) Эта формула описывает так называемый *эффект Физо*, впервые предсказанный *Френелем* (*A. Fresnel*, 1818). Влияние дисперсии на этот эффект рассмотрено *Лорентцем* (*H. A. Lorentz*, 1895).

дует прежде всего, что направления распространения всех волн лежат в одной плоскости; выберем ее в качестве плоскости xz.

Из равенств

$$k_{0x} = k_{1x} = k_{2x} \tag{86,1}$$

следует для z-компонент этих векторов:

$$\begin{gathered} k_{1z} = -k_{0z} = -\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0, \\ k_{2z} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2 - k_{0x}^2} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\theta_0}; \end{gathered} \tag{86,2}$$

в обеих средах полагаем $\mu = 1$. Вектор $\mathbf{k}_0$, по определению, вещественен. Вместе с ним вещественен также $\mathbf{k}_1$. Величина же k_{2z} в поглощающей среде комплексна, причем корень должен быть взят с таким знаком, чтобы было $\operatorname{Im} k_{2z} > 0$ в соответствии с тем, что преломленная волна затухает в глубь среды 2.

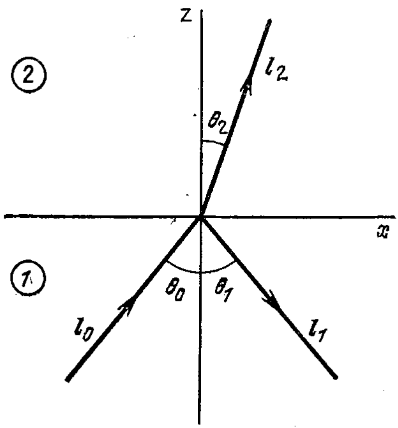

Рис. 46.

Если прозрачны обе среды, то из равенств (86,1) следуют известные законы отражения и преломления

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{86,3}$$

Для определения амплитуд отраженной и преломленной волн надо обратиться к граничным условиям на поверхности раздела ($z = 0$). При этом мы рассмотрим отдельно два случая — когда электрическое поле $\mathbf{E}_0$ лежит в плоскости падения или перпендикулярно к ней; тем самым мы рассматриваем и общий случай, когда $\mathbf{E}_0$ может быть разложено на две такие компоненты.

Предположим сначала, что $\mathbf{E}_0$ перпендикулярно к плоскости падения; из соображений симметрии очевидно, что то же будет относиться и к полям $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ в отраженной и преломленной волнах. Вектор же $\mathbf{H}$ лежит в плоскости xz. Граничные условия требуют непрерывности $E_y = E$ и H_x[1]); согласно (83,3) $H_x = -ck_zE_y/\omega$.

[1]) Граничные условия для нормальных компонент $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ не дают в данном случае ничего нового, в соответствии с тем, что уравнения $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ являются следствием уравнений (83,1).

Поле в среде 1 есть сумма полей падающей и отраженной волн, так что мы получаем два уравнения:

$$E_0+E_1=E_2, \quad k_{0z}(E_0-E_1)=k_{2z}E_2.$$

Экспоненциальные множители в E сокращаются в обеих сторонах равенства ввиду одинаковости k_x (а также частоты ω) во всех трех волнах; ниже под $\mathbf{E}$ подразумеваются везде комплексные амплитуды волн. Решение написанных уравнений приводит к следующим *формулам Френеля*:

$$E_1=\frac{k_{0z}-k_{2z}}{k_{0z}+k_{2z}}E_0=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0-\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0}}E_0,$$
$$E_2=\frac{2k_{0z}}{k_{0z}+k_{2z}}E_0=\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0}}E_0. \qquad (86,4)$$

Если прозрачны обе среды, то с помощью соотношений (86,3) можно представить эти формулы в виде

$$E_1=\frac{\sin(\theta_2-\theta_0)}{\sin(\theta_2+\theta_0)}E_0, \quad E_2=\frac{2\cos\theta_0\sin\theta_2}{\sin(\theta_2+\theta_0)}E_0. \qquad (86,5)$$

Аналогичным образом можно рассмотреть случай, когда $\mathbf{E}$ лежит в плоскости падения; при этом удобнее производить вычисления для магнитного поля, перпендикулярного к плоскости падения. В результате получаются еще две формулы Френеля:

$$H_1=\frac{\varepsilon_2k_{0z}-\varepsilon_1k_{2z}}{\varepsilon_2k_{0z}+\varepsilon_1k_{2z}}H_0=\frac{\varepsilon_2\cos\theta_0-\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0)}}{\varepsilon_2\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0)}}H_0,$$
$$H_2=\frac{2\varepsilon_2k_{0z}}{\varepsilon_1k_{2z}+\varepsilon_2k_{0z}}H_0=\frac{2\varepsilon_2\cos\theta_0}{\varepsilon_2\cos\theta_0+\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0)}}H_0. \qquad (86,6)$$

Если прозрачны обе среды, то эти формулы можно представить в виде

$$H_1=\frac{\operatorname{tg}(\theta_0-\theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0+\theta_2)}H_0, \quad H_2=\frac{\sin 2\theta_0}{\sin(\theta_0+\theta_2)\cos(\theta_0-\theta_2)}H_0. \qquad (86,7)$$

Коэффициент отражения R определяется как отношение среднего (по времени) отраженного от поверхности потока энергии к падающему потоку. Каждый из этих потоков дается средним значением z-компоненты вектора Пойнтинга (83,11) соответствующей волны:

$$R=\frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1|\mathbf{E}_1|^2}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0|\mathbf{E}_0|^2}=\frac{|\mathbf{E}_1|^2}{|\mathbf{E}_0|^2}.$$

При нормальном падении ($\theta_0=0$) оба случая поляризации эквивалентны и коэффициент отражения дается формулой

$$R=\left|\frac{\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}\right|^2. \qquad (86,8)$$

Эта формула справедлива как для прозрачной, так и для поглощающей отражающей среды. Если ввести n_2 и $\varkappa_2$ согласно $\sqrt{\varepsilon_2}=n_2+i\varkappa_2$, то, например, при падении из пустоты ($\varepsilon_1=1$) получим

$$R=\frac{(n_2-1)^2+\varkappa_2^2}{(n_2+1)^2+\varkappa_2^2}. \tag{86,9}$$

Дальнейшее обсуждение полученных формул произведем в предположении прозрачности обеих сред. Предварительно сделаем следующее общее замечание. Граница раздела между двумя различными средами представляет собой в действительности не геометрическую поверхность, а тонкий переходный слой. Справедливость формул (86,1) не связана с какими бы то ни было предположениями о характере этого слоя. Вывод же формул Френеля, основанный на использовании условий на границе раздела, предполагает малость толщины переходного слоя δ по сравнению с длиной волны λ. Обычно толщина δ сравнима с междуатомными расстояниями, во всяком случае малыми по сравнению с λ (в противном случае было бы вообще невозможным макроскопическое рассмотрение поля); поэтому и условие $\lambda\gg\delta$ обычно выполняется. В обратном же предельном случае явление преломления имело бы совсем другой характер. При $\delta\gg\lambda$ выполнены условия применимости геометрической оптики (λ мало по сравнению с размерами неоднородностей среды). Поэтому в таком случае можно было бы рассматривать распространение волны как распространение лучей, испытывающих в переходном слое рефракцию, но проходящих через него без всякого отражения. Другими словами, коэффициент отражения был бы равен нулю.

Вернемся к формулам Френеля. При отражении от прозрачной среды коэффициенты пропорциональности между $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{E}_0$ в этих формулах вещественны[1]). Это значит, что фаза волны либо остается неизменной, либо испытывает скачок на π, смотря по знаку этих коэффициентов. В частности, фаза преломленной волны всегда совпадает с фазой падающей волны. Отражение же может сопровождаться изменением фазы[2]). Так, при нормальном падении фаза волны не меняется, если $\varepsilon_1>\varepsilon_2$. Если же $\varepsilon_2>\varepsilon_1$, то векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_0$ имеют противоположные знаки, т. е. происходит изменение фазы волны на π.

[1]) Мы оставляем пока в стороне случай так называемого полного отражения (см. ниже).

[2]) Отражение от поглощающей среды приводит, вообще говоря, к возникновению эллиптической поляризации. Явные выражения для амплитудных и фазовых соотношений между тремя волнами при этом очень громоздки. Их можно найти в книге *Стрэттона Дж. А.* Теория электромагнетизма, гл. IX.— М.: ГТТИ, 1948 (*Stratton J. A.* Electromagnetic Theory, ch. IX.— N.Y.: McGraw-Hill, 1941).

Коэффициенты отражения при наклонном падении даются согласно (86,5) и (86,7) формулами

$$R_{\perp}=\frac{\sin^2(\theta_2-\theta_0)}{\sin^2(\theta_2+\theta_0)}, \quad R_{\parallel}=\frac{\operatorname{tg}^2(\theta_2-\theta_0)}{\operatorname{tg}^2(\theta_2+\theta_0)}. \tag{86,10}$$

Здесь и ниже индексы $\perp$ и $\parallel$ отмечают случаи, когда поле $\mathbf{E}$ соответственно перпендикулярно или параллельно плоскости падения. Отметим следующую симметрию: выражения (86,10) не меняются при взаимной замене θ_2 и θ_0 (фазы же отраженных волн при этом меняются, согласно формулам (86,5) и (86,7), на π). Другими словами, коэффициент отражения для волны, падающей из среды *1* под углом θ_0, равен коэффициенту отражения для волны, падающей из среды *2* под углом θ_2.

Замечательным свойством обладает отражение света, падающего под таким углом θ_0, при котором $\theta_0+\theta_2=\pi/2$ (отраженный и преломленный лучи при этом взаимно перпендикулярны). Обозначим это значение посредством θ_p; написав $\sin\theta_p=$ $=\sin(\pi/2-\theta_2)=\cos\theta_2$ и воспользовавшись законом преломления (86,3), получим

$$\operatorname{tg}\theta_p=\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}. \tag{86,11}$$

При $\theta_0=\theta_p$ имеем $\operatorname{tg}(\theta_0+\theta_2)=\infty$ и $R_{\parallel}$ обращается в нуль. Поэтому при любом направлении поляризации света, падающего под этим углом, отраженный свет будет поляризован так, что электрическое поле в нем перпендикулярно к плоскости падения. Таким же поляризованным будет отраженный свет и при падении естественного света; все компоненты с другой поляризацией при этом вообще не отразятся. Угол θ_p называют *углом полной поляризации* или *углом Брюстера*. Отметим, что, в то время как отражение может приводить к полной поляризации естественного света, в преломленном свете полная поляризация не достигается ни при каком угле падения.

Отражение и преломление поляризованного света всегда приводит снова к плоскополяризованному свету, но с направлением поляризации, вообще говоря, не совпадающим с таковым у падающего света. Пусть γ_0 — угол между направлением $\mathbf{E}_0$ и плоскостью падения, а γ_1 и γ_2 — аналогичные углы для отраженной и преломленной волн. С помощью формул (86,5) и (86,7) легко получить соотношения

$$\operatorname{tg}\gamma_1=-\frac{\cos(\theta_0-\theta_2)}{\cos(\theta_0+\theta_2)}\operatorname{tg}\gamma_0, \quad \operatorname{tg}\gamma_2=\cos(\theta_0-\theta_2)\operatorname{tg}\gamma_0. \tag{86,12}$$

Углы γ_0, γ_1, γ_2 совпадают при всех углах падения лишь в очевидных случаях $\gamma_0=0$ и $\gamma_0=\pi/2$; они совпадают также при нормальном ($\theta_0=\theta_2=0$) и скользящем ($\theta_0=\pi/2$) падениях (в последнем случае преломленная волна вообще отсутствует). Во всех же остальных случаях из (86,12) следуют (учитывая, что

$0<\theta_0,\theta_2<\pi/2$ и полагая, что $0<\gamma_0<\pi/2$; $0<\gamma_1$, $\gamma_2<\pi$) неравенства

$$\gamma_1>\gamma_0>\gamma_2.$$

Таким образом, направление **E** при отражении поворачивается от плоскости падения, а при преломлении — к ней.

Сравнение двух формул (86,10) показывает, что при всех углах падения (за исключением только $\theta_0=0$ и $\theta_0=\pi/2$)

$$R_{\parallel}<R_{\perp}.$$

Поэтому, например, при падении естественного света отраженный свет оказывается частично поляризованным с преимущественным направлением электрического поля, перпендикулярным к плоскости падения. Преломленный же свет будет частично поляризованным с преимущественным направлением **E** в плоскости падения.

Характер зависимости $R_{\parallel}$ и $R_{\perp}$ от угла падения существенно различен. Коэффициент $R_{\perp}$ монотонно возрастает по мере увеличения θ_0, начиная от значения (86,8) при $\theta_0=0$. Коэффициент же $R_{\parallel}$, равный тому же значению (86,8) при $\theta=0$, по мере увеличения θ_0 сначала убывает, обращается в нуль при $\theta_0=\theta_p$ и лишь затем начинает монотонно возрастать.

При этом надо различать два случая. Если отражение происходит, как говорят, от *оптически более плотной* среды, т. е. $\varepsilon_2>\varepsilon_1$, то возрастание $R_{\parallel}$ и $R_{\perp}$ продолжается вплоть до $\theta_0=\pi/2$ (*скользящее падение*), когда оба достигают значения 1. Если же отражающая среда *оптически менее плотная*, $\varepsilon_2<\varepsilon_1$, то оба коэффициента обращаются в 1 уже при угле падения $\theta_0=\theta_r$, где θ_r определяется равенством

$$\sin\theta_r=\sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}=n_2/n_1 \qquad (86,13)$$

и называется *предельным углом полного отражения*. При $\theta_0=\theta_r$ угол преломления $\theta_2=\pi/2$, т. е. преломленная волна распространяется параллельно поверхности раздела.

Отражение под углами $\theta_0>\theta_r$ от оптически менее плотной среды требует особого рассмотрения. В этом случае k_{2z} (см. (86,2)) часто мнимо, т. е. поле в преломляющей среде затухает. Затухание волны в глубь среды при отсутствии в ней истинного поглощения (диссипации энергии) означает, что поток энергии из первой во вторую среду в среднем отсутствует (путем простого вычисления легко непосредственно убедиться в том, что вектор $\overline{\mathbf{S}}$ среднего потока энергии во второй среде действительно имеет лишь x-компоненту). Другими словами, вся падающая на границу раздела энергия отражается обратно в первую среду, т. е. коэффициенты отражения

$$R_{\perp}=R_{\parallel}=1.$$

Это явление называется *полным отражением*[1]). В последнем равенстве для $R_\perp$ и $R_\parallel$ можно убедиться, разумеется, и непосредственно с помощью формул Френеля (86,4) и (86,6).

При $\theta_0 > \theta_r$ коэффициенты пропорциональности между $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_0$ становятся комплексными величинами вида $(a-ib)/(a+ib)$. Величины же $R_\perp$ и $R_\parallel$ даются квадратами модулей этих коэффициентов, равными единице. Эти формулы, однако, позволяют определить не только отношение абсолютных значений поля в отраженной и падающей волнах, но и разницу в их фазах. Для этого надо представить их в виде

$$E_{1\perp} = e^{-i\delta_\perp} E_{0\perp}, \quad E_{1\parallel} = e^{-i\delta_\parallel} E_{0\parallel}.$$

Имеем[2])

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_\perp}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1 \sin^2\theta_0 - \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0}, \quad \operatorname{tg}\frac{\delta_\parallel}{2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1(\varepsilon_1\sin^2\theta_0 - \varepsilon_2)}}{\varepsilon_2\cos\theta_0}. \qquad (86,14)$$

Таким образом, полное отражение сопровождается изменением фазы волны, различным, вообще говоря, для компонент поля, параллельной и перпендикулярной к плоскости падения. Поэтому при отражении волны, поляризованной в плоскости, наклонной к плоскости падения, отраженная волна будет эллиптически поляризована. Для разности фаз $\delta = \delta_\perp - \delta_\parallel$ легко получается выражение

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta_0\sqrt{\varepsilon_1\sin^2\theta_0 - \varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}\sin^2\theta_0}. \qquad (86,15)$$

Эта разность обращается в нуль лишь при $\theta_0 = \theta_r$ и $\theta_0 = \pi/2$.

Задачи

1. Найти закон обращения коэффициента отражения в 1 вблизи угла полного отражения.

Решение. Полагаем $\theta_0 = \theta_r - \delta$, где δ — малая величина, и разлагаем в формулах (86,10) $\sin\theta_0$ и $\cos\theta_0$ по степеням δ. В результате получаем:

$$R_\perp = 1 - 4\sqrt{2\delta}\,(n^2-1)^{-1/4}, \quad R_\parallel = 1 - 4\sqrt{2\delta}\,n^2(n^2-1)^{-1/4},$$

где $n^2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2 > 1$. Производные $dR/d\delta$ обращаются при $\delta \to 0$ в бесконечность как $\delta^{-1/2}$.

2. Найти коэффициент отражения при почти скользящем падении света из пустоты на поверхность тела с близким к 1 значением ε.

Решение. Формулы (86,10) дают одинаковый коэффициент отражения:

$$R_\perp \approx R_\parallel \approx \frac{\left(\varphi_0 - \sqrt{\varphi_0^2 + \varepsilon - 1}\right)^4}{(\varepsilon-1)^2},$$

где $\varphi_0 = \pi/2 - \theta_0$.

---

[1]) Коэффициент отражения всегда равен единице при отражении от среды с вещественным, но отрицательным ε. В такой среде тоже нет истинного поглощения, но волна не может проникнуть в глубь ее.

[2]) Если $\frac{a-ib}{a+ib} = e^{-i\delta}$, то $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{b}{a}$.

3. Определить коэффициент отражения при падении волны из пустоты на границу среды с отличными от единицы ε и μ.

Решение. Вычисления, полностью аналогичные произведенным в тексте, приводят к результату:

$$R_\perp = \left| \frac{\mu\cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0}}{\mu\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0}} \right|^2,$$

$$R_\parallel = \left| \frac{\varepsilon\cos\theta_0 - \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0}}{\varepsilon\cos\theta_0 + \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0}} \right|^2.$$

4. Плоскопараллельный слой вещества *2* находится между вакуумом (среда *1*) и произвольной средой *3*. Из вакуума на слой падает свет, поляризованный в плоскости падения (или перпендикулярно к ней). Выразить коэффициент отражения от слоя R через коэффициенты отражения при падении света на полубесконечную среду *2* или *3*.

Решение. Обозначим посредством A_0 и A_1 амплитуды поля (**E** или **H** — смотря по тому, какой из этих векторов параллелен плоскости слоя) в падающей и отраженной волнах. Поле в слое складывается из преломленной волны (амплитуда A_2) и волны, отраженной от границы *2—3* (амплитуда A_2'). Граничное условие на поверхности *1—2* дает равенство вида

$$A_2' = a(A_1 - r_{12}A_0), \tag{1}$$

где a и r_{12} — постоянные. При отражении от полубесконечной среды *2* волна A_2' отсутствует, так что (1) дает $r_{12} = A_1/A_0$, т. е. r_{12} есть амплитуда отражения для этого случая. Еще одно уравнение получается из (1) перестановкой A_1 с A_0 и заменой A_2' на A_2, что соответствует просто изменению знака z-компоненты волнового вектора:

$$A_2 = a(A_0 - r_{12}A_1). \tag{2}$$

В среде *3* имеется только одна (прошедшая) волна. Для ее амплитуды A_3 имеем условия

$$A_2 e^{i\psi} = aA_3, \qquad A_2' e^{-i\psi} = -ar_{32}A_3 \tag{3}$$

(аналогичные условиям (1), (2) с $A_1 = 0$); экспоненциальные множители учитывают изменение фазы волны на толщине слоя h, причем

$$\psi = \frac{\omega}{c} h \sqrt{\varepsilon_2 - \sin^2\theta_0}. \tag{4}$$

Исключая из уравнений (3) A_3, имеем

$$A_2' e^{-i\psi} = r_{23}A_2 e^{i\psi} \tag{5}$$

$(r_{23} = -r_{32})$.

Из уравнений (1), (2), (5) найдем амплитуду отражения от слоя:

$$r = \frac{A_1}{A_0} = \frac{r_{12}e^{-2i\psi} + r_{23}}{e^{-2i\psi} + r_{12}r_{23}} \tag{6}$$

(коэффициент отражения $R = |r|^2$). Смысл постоянной r_{23} выясняется из того, что при $h = 0$ r должно совпадать с амплитудой отражения r_{13} от полубесконечной среды *3*; отсюда находим

$$r_{23} = \frac{r_{12} - r_{13}}{r_{12}r_{13} - 1}. \tag{7}$$

Формулы (6), (7) решают поставленную задачу. Подчеркнем, что их вывод не связан с какими-либо предположениями о свойствах сред *2* и *3*, которые могут быть как прозрачными, так и поглощающими.

Если среды *2* и *3* прозрачны, то величины ψ, r_{12}, r_{13} вещественны, а r_{23} представляет собой амплитуду отражения на границе между полубесконечными средами *2* и *3*. Из (6) имеем при этом

$$R=\frac{(r_{12}+r_{23})^2-4r_{12}r_{23}\sin^2\psi}{(r_{12}r_{23}+1)^2-4r_{12}r_{23}\sin^2\psi}. \tag{8}$$

При изменении ψ эта величина меняется в пределах между

$$\left(\frac{r_{12}+r_{23}}{r_{12}r_{23}+1}\right)^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{r_{12}-r_{23}}{r_{12}r_{23}-1}\right)^2.$$

При нормальном падении света $r_{12}=\dfrac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$, и аналогичные соотношения имеют место для r_{13} и r_{23}. Если $n_2^2=n_1n_3$, то $r_{12}=r_{23}$ и при соответствующем выборе толщины слоя R может обратиться в нуль.

Если среда *3* является вакуумом, то $r_{13}=0$, $r_{23}=-r_{12}$ и из (6) имеем

$$r=\frac{r_{12}\left(e^{-2i\psi}-1\right)}{e^{-2i\psi}-r_{12}^2}=-\frac{\operatorname{sh} i\psi}{\operatorname{sh}[i\psi+\ln(-r_{12})]}. \tag{9}$$

Если при этом среда *2* прозрачна, то

$$R=\frac{4R_{12}\sin^2\psi}{(1-R_{12})^2+4R_{12}\sin^2\psi}.$$

Коэффициент прохождения D через слой (из вакуума в вакуум) совпадает с $1-R$, лишь если среда *2* прозрачна. В противном случае для вычисления D надо исходить из уравнений (1)—(3), положив в них $r_{32}=r_{12}$. «Амплитуда прохождения» d равна:

$$d=\frac{A_3}{A_0}=\frac{1-r_{12}^2}{e^{-i\psi}-r_{12}^2e^{i\psi}}, \tag{10}$$

а коэффициент прохождения $D=|d|^2$.

5. Определить коэффициенты отражения и прохождения при нормальном падении света на пластинку с очень большой комплексной диэлектрической проницаемостью ε.

Р е ш е н и е. В этом случае

$$r_{12}=\frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}\approx-\left(1-\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\right),$$

и согласно формуле (9) предыдущей задачи

$$r=-\frac{1}{1-(2/\sqrt{\varepsilon})\operatorname{cth} i\psi}, \qquad \psi=\frac{\omega}{c}h\sqrt{\varepsilon}.$$

Если пластинка настолько тонка, что $h\omega/c\ll 1/\sqrt{|\varepsilon|}$, то можно написать

$$r=-\frac{1}{1+(2ic/\varepsilon\omega h)}.$$

При этом можно еще различать два случая:

$$\text{при } \frac{1}{|\varepsilon|}\ll\frac{\omega}{c}h\ll\frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}: \quad R=1-\frac{4c}{\omega h}\frac{\varepsilon''}{|\varepsilon|^2},$$

$$\text{при } \frac{\omega}{c}h\ll\frac{1}{|\varepsilon|}: \quad R=\frac{\omega^2h^2}{4c^2}|\varepsilon|^2.$$

Для коэффициента прохождения имеем согласно формуле (10)

$$\text{при } \frac{\omega}{c}h \sim \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}: \quad d = -\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}\,\operatorname{sh} i\psi},$$

$$\text{при } \frac{\omega}{c}h \ll \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}: \quad d = \frac{1}{1 - i\varepsilon\omega h/2c}.$$

В последнем случае можно еще различать

$$\text{при } \frac{1}{|\varepsilon|} \ll \frac{\omega}{c}h \ll \frac{1}{\sqrt{|\varepsilon|}}: \quad D = \frac{4c^2}{\omega^2 h^2 |\varepsilon|^2},$$

$$\text{при } \frac{\omega}{c}h \ll \frac{1}{|\varepsilon|}: \quad D = 1 - \frac{\varepsilon'' \omega h}{c}.$$

§ 87. Поверхностный импеданс металлов

Диэлектрическая проницаемость металлов по своей абсолютной величине при не слишком больших частотах велика по сравнению с 1 (при $\omega \to 0$ она стремится к бесконечности как $1/\omega$). В этих условиях длина волны $\delta \sim c/\omega\sqrt{|\varepsilon|}$ в металле мала по сравнению с длиной волны $\lambda \sim c/\omega$ в пустоте[1]). Если при этом δ (но не обязательно λ) мала также и по сравнению с радиусами кривизны поверхности металла, то этим обстоятельством можно воспользоваться для существенного упрощения задачи об отражении произвольных электромагнитных волн от металла.

Малость δ означает, что производные от компонент поля внутри металла в направлении нормали к поверхности велики по сравнению с производными в тангенциальных направлениях. Поэтому поле внутри металла вблизи поверхности можно рассматривать как поле плоской волны и, соответственно, поля $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{H}_t$ связаны друг с другом соотношением

$$\mathbf{E}_t = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\,[\mathbf{H}_t\mathbf{n}], \tag{87,1}$$

где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности, направленная внутрь металла. Поскольку, с другой стороны, $\mathbf{E}_t$ и $\mathbf{H}_t$ непрерывны, то таким же соотношением должны быть связаны их значения для поля вне металла у его поверхности. Равенством (87,1) можно воспользоваться (как было указано *М. А. Леонтовичем*, 1948) в качестве граничного условия при определении поля вне проводника. Таким образом, внешнюю электромагнитную задачу можно решать, совершенно не рассматривая поля внутри металла.

---

[1]) Большие значения $\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ практически всегда являются комплексными. При этом электромагнитное поле затухает в глубь тела, так что длина волны в нем является в то же время глубиной проникновения поля. Если $\varepsilon(\omega)$ выражается через проводимость σ (согласно (77,9)), то эта величина совпадает с глубиной проникновения, введенной в § 59.