следующему виду зависящего от поля диэлектрического тензора:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik} + \alpha E_i E_k, \tag{100,1}$$

где α — скалярная постоянная.

Одна из главных осей этого тензора совпадает с направлением электрического поля, и соответствующее главное значение равно

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon^{(0)} + \alpha E^2. \tag{100,2}$$

Остальные два главных значения равны друг другу,

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon^{(0)}, \tag{100,3}$$

а положение соответствующих главных осей в плоскости, перпендикулярной к полю, произвольно. Таким образом, изотропное тело в электрическом поле ведет себя в оптическом отношении как одноосный кристалл (*эффект Керра*).

Изменение оптической симметрии в электрическом поле может иметь место и у кристалла (так, оптически одноосный кристалл может превратиться в двухосный, оптически изотропный кубический кристалл может стать оптически анизотропным). В отличие от соответствующего явления у изотропных тел, здесь эффект может быть и первого порядка по полю. Этому линейному эффекту соответствует диэлектрический тензор вида

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + \alpha_{ikl} E_l, \tag{100,4}$$

где совокупность коэффициентов α_{ikl} составляет тензор третьего ранга, симметричный по индексам i и k. Симметрия этого тензора совпадает с симметрией пьезоэлектрического тензора. Поэтому рассматриваемый эффект существует у кристаллов тех же 20 классов, которые допускают пьезоэлектричество.

§ 101. Магнитооптические эффекты

При наличии постоянного магнитного поля $\mathbf{H}$ [1]) тензор $\varepsilon_{ik}(\omega; \mathbf{H})$ перестает быть симметричным. Обобщенный принцип симметрии кинетических коэффициентов связывает компоненты ε_{ik} и ε_{ki} в различных полях:

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{H}) = \varepsilon_{ki}(-\mathbf{H}). \tag{101,1}$$

Условие отсутствия поглощения требует лишь эрмитовости этого тензора:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^{*} \tag{101,2}$$

(как это видно из (96,5)), а не его вещественности. Из (101,2) следует только, что вещественная и мнимая части ε_{ik} должны

[1]) Не смешивать с периодическим слабым полем электромагнитной волны!

быть соответственно симметричной и антисимметричной:

$$\varepsilon'_{ik}=\varepsilon'_{ki},\quad \varepsilon''_{ik}=-\varepsilon''_{ki}. \tag{101,3}$$

Учитывая (101,1), имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon'_{ik}(\mathbf{H})&=\varepsilon'_{ki}(\mathbf{H})=\varepsilon'_{ik}(-\mathbf{H}),\\ \varepsilon''_{ik}(\mathbf{H})&=-\varepsilon''_{ki}(\mathbf{H})=-\varepsilon''_{ik}(-\mathbf{H}),\end{aligned} \tag{101,4}$$

т. е. в непоглощающей среде величины ε'_{ik} являются четными, а ε''_{ik}—нечетными функциями $\mathbf{H}$.

Такими же свойствами симметрии обладает, очевидно, и обратный тензор ε^{-1}_{ik}. В дальнейших вычислениях будет удобнее пользоваться именно этим тензором. Во избежание многочисленных индексов введем для него специальное обозначение[1]):

$$\varepsilon^{-1}_{ik}=\eta_{ik}=\eta'_{ik}+i\eta''_{ik} \tag{101,5}$$

(которым мы пользовались уже и ранее).

Как известно, всякий антисимметричный тензор второго ранга эквивалентен (дуален) некоторому аксиальному вектору; для тензора η''_{ik} обозначим этот вектор посредством $\mathbf{G}$. С помощью антисимметричного единичного тензора e_{ikl} связь между компонентами тензора η''_{ik} и вектора $\mathbf{G}$ записывается в виде

$$\eta''_{ik}=e_{ikl}G_l, \tag{101,6}$$

а в компонентах:

$$\eta''_{xy}=G_z,\quad \eta''_{zx}=G_y,\quad \eta''_{yz}=G_x.$$

Связь $E_i=\eta_{ik}D_k$ между электрической индукцией и напряженностью принимает при этом вид:

$$E_i=(\eta'_{ik}+ie_{ikl}G_l)D_k=\eta'_{ik}D_k+i[\mathbf{DG}]_i. \tag{101,7}$$

Аналогичным образом выглядит прямая зависимость $\mathbf{D}$ от $\mathbf{E}$:

$$D_i=\varepsilon'_{ik}E_k+i[\mathbf{Eg}]_i. \tag{101,8}$$

Связь между коэффициентами в (101,7) и (101,8) дается формулами:

$$\eta'_{ik}=\frac{1}{|\varepsilon|}\{\varepsilon'^{-1}_{ik}|\varepsilon'|-g_ig_k\},\quad G_i=-\frac{1}{|\varepsilon|}\varepsilon'_{ik}g_k, \tag{101,9}$$

где $|\varepsilon|$ и $|\varepsilon'|$—определители тензоров ε_{ik} и ε'_{ik} (ср. задачу к § 22). Среду с такой формой зависимости между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ называют *гиротропной*. Вектор $\mathbf{g}$ называют *вектором гирации*, а $\mathbf{G}$—*вектором оптической активности*.

Произведем общее исследование характера волн, распространяющихся в произвольной гиротропной среде, считая при этом

[1]) Разумеется, η'_{ik} и η''_{ik} сами не являются тензорами, обратными ε'_{ik} и ε''_{ik}.

среду анизотропной и не делая никаких предположений о величине магнитного поля[1]).

Выберем направление волнового вектора в качестве оси z и напишем уравнение (97,21):

$$\left(\eta_{\alpha\beta}-\frac{1}{n^2}\delta_{\alpha\beta}\right)D_\beta=\left(\eta'_{\alpha\beta}+i\eta''_{\alpha\beta}-\frac{1}{n^2}\delta_{\alpha\beta}\right)D_\beta=0, \quad (101,10)$$

где индексы α, β пробегают значения x, y. Направления осей x и y выберем вдоль главных осей двумерного тензора $\eta'_{\alpha\beta}$, а соответствующие главные значения этого тензора обозначим как n_{01}^{-2} и n_{02}^{-2}; тогда уравнения примут следующий вид:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{n_{01}^2}-\frac{1}{n^2}\right)D_x+iG_zD_y=0,\\ -iG_zD_x+\left(\frac{1}{n_{02}^2}-\frac{1}{n^2}\right)D_y=0.\end{aligned} \quad (101,11)$$

Условие равенства нулю определителя этой системы дает квадратное по n^2 уравнение:

$$\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_{01}^2}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_{02}^2}\right)=G_z^2, \quad (101,12)$$

корни которого определяют два значения n, относящиеся к заданному направлению $\mathbf{n}$[2]):

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2}+\frac{1}{n_{02}^2}\right)\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2}-\frac{1}{n_{02}^2}\right)^2+G_z^2}\,. \quad (101,13)$$

Подставляя эти значения обратно в уравнения (101,11), найдем соответствующие отношения:

$$\frac{D_y}{D_x}=\frac{i}{G_z}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2}-\frac{1}{n_{02}^2}\right)\mp\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2}-\frac{1}{n_{02}^2}\right)^2+G_z^2}\right]. \quad (101,14)$$

Чисто мнимое отношение D_y/D_x означает, что волны эллиптически поляризованы, причем главные оси эллипсов поляризации совпадают с осями x, y. Произведение двух значений этого отношения равно, как легко видеть, единице. Другими словами,

---

[1]) Мы по-прежнему считаем среду немагнитной по отношению к переменному полю электромагнитной волны (т. е. полагаем $\mu_{ik}(\omega)=\delta_{ik}$). Этим, однако, не исключается возможность намагничения среды постоянным полем (т. е. статическая проницаемость может быть отлична от 1).

Все излагаемые свойства $\varepsilon_{ik}(\omega)$ в той же степени относятся к тензору $\mu_{ik}(\omega)$, когда в данной области частот существенна дисперсия магнитной проницаемости.

[2]) В отсутствие поля $\mathbf{G}=0$ и $n=n_{01}$ или n_{02}. Следует, однако, иметь в виду, что при наличии поля величины n_{01} и n_{02} в уравнении (101,12) не имеют, вообще говоря, смысла значений n при $\mathbf{H}=0$, так как от поля зависит не только вектор $\mathbf{G}$, но и компоненты тензора η'_{ik}.

если в одной волне

$$D_y = i\rho D_x$$

(где вещественное число ρ есть отношение длин осей эллипса поляризации), то во второй волне

$$D_y = -iD_x/\rho.$$

Это значит, что эллипсы поляризации двух волн имеют одинаковое отношение осей, но повернуты относительно друг друга на 90°; направление вращения в них противоположно (рис. 57).

Если обозначить векторы $\mathbf{D}$ в обеих волнах как $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_2$, то полученные соотношения могут быть записаны в виде

$$\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2^* = D_{1x}D_{2x}^* + D_{1y}D_{2y}^* = 0.$$

Такое соотношение является общим свойством собственных векторов, возникающих при приведении к главным осям эрмитового тензора (в данном случае — тензора $\eta_{\alpha\beta}$).

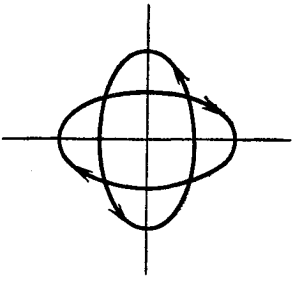

Рис. 57.

Компоненты вектора $\mathbf{G}$ и тензора η'_{ik} являются функциями напряженности магнитного поля. Если (как это обычно имеет место) магнитное поле является сравнительно слабым, то можно произвести разложение по его степеням. Вектор $\mathbf{G}$ равен нулю в отсутствие поля; поэтому в слабом поле можно положить

$$G_i = f_{ik}H_k, \qquad (101,15)$$

где f_{ik} — тензор второго ранга, в общем случае несимметричный. Такая форма зависимости находится в согласии с общим правилом, согласно которому в прозрачной среде компоненты антисимметричного тензора η''_{ik} (как и тензора ε''_{ik}) должны быть нечетными функциями $\mathbf{H}$. Что же касается симметричного тензора η'_{ik}, то его компоненты являются четными функциями магнитного поля. Поэтому первые поправочные, по сравнению со значениями в отсутствие поля, члены в η'_{ik} — второго порядка по полю (в пренебрежении этими членами из (101,9) имеем просто $\eta'_{ik} = \varepsilon'^{-1}_{ik}$).

В общем случае произвольного направления волнового вектора магнитное поле сравнительно мало влияет на распространение света в кристалле, вызывая лишь появление слабой эллиптичности колебаний с малым (первого порядка по полю) отношением длин осей эллипса поляризации.

Исключение в отношении характера магнитооптического эффекта представляют направления оптических осей (и близкие к ним), вдоль которых оба значения n в отсутствие поля совпадают. Корни уравнения (101,12) отличаются тогда от этих зна-

чений на величины первого порядка малости[1]) и возникают эффекты, аналогичные эффектам в изотропных телах, к рассмотрению которых мы теперь и перейдем. Магнитооптический эффект в изотропных телах (а также в кристаллах кубической системы) представляет особый интерес ввиду его своеобразного характера и сравнительно большой величины.

Пренебрегая величинами второго порядка малости, имеем $\eta'_{ik}=\varepsilon^{-1}\delta_{ik}$, где ε—диэлектрическая проницаемость изотропной среды в отсутствие магнитного поля. Зависимость между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ дается формулами

$$\mathbf{E}=\frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D}+i[\mathbf{DG}],\quad \mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}+i[\mathbf{Eg}], \tag{101,16}$$

причем векторы $\mathbf{g}$ и $\mathbf{G}$ связаны, в том же приближении, соотношением

$$\mathbf{G}=-\frac{1}{\varepsilon^2}\mathbf{g}. \tag{101,17}$$

Зависимость $\mathbf{g}$ (или $\mathbf{G}$) от внешнего поля сводится в изотропной среде к простой пропорциональности:

$$\mathbf{g}=f\mathbf{H}; \tag{101,18}$$

скалярная постоянная может быть как положительной, так и отрицательной.

В уравнении (101,12) имеем теперь $n_{01}=n_{02}\equiv n_0=\sqrt{\varepsilon}$; это — коэффициент преломления в отсутствие поля. Отсюда

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n_0^2}\mp G_z$$

или, с той же точностью,

$$n_{\mp}^2=n_0^2\pm n_0^4G_z=n_0^2\mp g_z. \tag{101,19}$$

Вспоминая, что ось z выбрана вдоль вектора $\mathbf{n}$, можно написать эту формулу с той же точностью в следующем векторном виде:

$$\left(\mathbf{n}\pm\frac{1}{2n_0}\mathbf{g}\right)^2=n_0^2. \tag{101,20}$$

Отсюда видно, что поверхность волновых векторов представляет собой в данном случае совокупность двух сфер радиуса n_0, центры которых смещены вдоль направления $\mathbf{G}$ на расстояние $\pm g/2n_0$ от начала координат.

Каждому из двух значений n соответствует своя поляризация волны; именно,

$$D_x=\mp iD_y, \tag{101,21}$$

[1]) Обратим внимание на то, что оба корня уравнения (101,12) при этом несколько отличаются друг от друга. Геометрически это означает, что обе полости (внутренняя и внешняя) поверхности волновых векторов оказываются полностью разделенными.

где знаки соответствуют знакам в (101,19). Равенство абсолютных значений D_x и D_y при сдвиге фаз между ними $\mp\pi/2$ означает круговую поляризацию волны с направлением вращения вектора **D** соответственно против и по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления волнового вектора (или, как принято говорить, соответственно *право-* и *левополяризованные волны*).

Разница между показателями преломления лево- и правополяризованных волн приводит к тому, что при преломлении на поверхности гиротропного тела возникают две поляризованные по кругу преломленные волны (так называемое *двойное круговое преломление*).

Пусть линейно поляризованная плоская волна падает в нормальном направлении на плоскопараллельный слой вещества (толщины l). Направление падения выберем в качестве оси z, а направление вектора $\mathbf{E} = \mathbf{D}$ в падающей волне — в качестве оси x. Линейное колебание можно представить в виде суммы двух круговых колебаний с противоположными направлениями вращения, которые будут затем распространяться в слое вещества с различными волновыми векторами $k_\pm = \omega n_\pm/c$. Положив амплитуду волны условно равной единице, будем иметь

$$D_x = \frac{1}{2}(e^{ik_+z} + e^{ik_-z}), \quad D_y = \frac{i}{2}(-e^{ik_+z} + e^{ik_-z}),$$

или, введя $k = (k_+ + k_-)/2$, $\varkappa = (k_+ - k_-)/2$,

$$D_x = \frac{1}{2}e^{ikz}(e^{i\varkappa z} + e^{-i\varkappa z}) = e^{ikz}\cos\varkappa z,$$

$$D_y = \frac{i}{2}e^{ikz}(-e^{i\varkappa z} + e^{-i\varkappa z}) = e^{ikz}\sin\varkappa z,$$

при выходе волны из слоя будем иметь

$$\frac{D_y}{D_x} = \operatorname{tg}\varkappa l = \operatorname{tg}\left(l\,\frac{\omega g}{2n_0}\right). \qquad (101,22)$$

Вещественность этого отношения означает, что волна остается линейно поляризованной, но с повернутым относительно первоначального направлением поляризации (*эффект Фарадея*). Угол поворота плоскости поляризации пропорционален пройденному волной пути; на единице длины вдоль направления волнового вектора он составляет

$$\frac{\omega g}{2cn_0}\cos\theta, \qquad (101,23)$$

где θ — угол между **n** и **g**.

Следует отметить, что при заданном направлении магнитного поля направление вращения плоскости поляризации (по отношению к направлению **n**) при изменении знака **n** меняется на обратное — правое вращение переходит в левое и наоборот. Поэтому,

если луч проходит один и тот же путь дважды (туда и обратно), то суммарное вращение плоскости поляризации будет вдвое больше, чем после одного прохождения.

При $\theta=\pi/2$ (волновой вектор перпендикулярен к магнитному полю) линейный по полю эффект, описываемый формулами (101,19), исчезает (в соответствии с указанным выше общим правилом, что из всех компонент вектора $\mathbf{g}$ на распространение света влияет лишь его проекция на направление $\mathbf{n}$). Поэтому при углах θ, близких к $\pi/2$, должны учитываться также и члены, пропорциональные квадрату поля. В частности, должны быть учтены члены второго порядка и в тензоре η'_{ik}. В силу аксиальной симметрии вокруг направления поля два главных значения симметричного тензора η'_{ik} будут одинаковы (как у одноосного кристалла). Мы выбираем ниже ось x вдоль направления поля и обозначаем главные значения η'_{ik} в направлениях параллельно и перпендикулярно к магнитному полю посредством $\eta_{\parallel}$ и $\eta_{\perp}$; разность $\eta_{\parallel}-\eta_{\perp}$ пропорциональна H^2.

Рассмотрим квадратичный эффект, возникающий при взаимно перпендикулярных $\mathbf{n}$ и $\mathbf{g}$ (*эффект Коттона—Мутона*). В уравнениях (101,11—12) имеем в этом случае $G_z=0$, а n_{01}^{-2} и n_{02}^{-2} равны соответственно $\eta_{\parallel}$ и $\eta_{\perp}$. Таким образом, в одной из волн

$$n^{-2}=\eta_{\parallel},\quad D_y=0;$$

эта волна линейно поляризована с вектором $\mathbf{D}$, направленным параллельно оси x. В другой же волне

$$n^{-2}=\eta_{\perp},\quad D_x=0,$$

т. е. $\mathbf{D}$ направлен вдоль оси y. Пусть линейно поляризованный свет падает в нормальном направлении на плоскопараллельный слой вещества, находящийся в параллельном ему магнитном поле. Две компоненты прошедшего в вещество света (с векторами $\mathbf{D}$ в плоскостях xz и yz) распространяются с различными значениями n. В результате этого свет, выходящий через противоположную сторону слоя, оказывается эллиптически поляризованным.

Наконец, остановимся еще на одном своеобразном эффекте, возникающем в среде с линейным по (постоянному) магнитному полю вектором оптической активности (101,15): намагничение немагнитной прозрачной среды переменным электрическим полем (*Л. П. Питаевский*, 1960).

Будем исходить из общей формулы (31,6)

$$-\frac{\mathbf{B}}{4\pi}=\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\mathbf{H}},$$

причем учтем вклад в $\tilde{U}$ от переменного электрического поля, даваемый формулой (80,11). Согласно теореме о малых добавках

к термодинамическим величинам, изменение $\delta\tilde{U}$ этого вклада при малом изменении диэлектрической проницаемости совпадает (будучи выражено через соответствующие переменные) с изменением свободной энергии $\delta\tilde{F}$. Для последнего можно воспользоваться формулой (14,1), обобщив ее очевидным образом на анизотропные среды (о том, что эта формула остается справедливой для переменного — а не постоянного, как в § 14, — поля в прозрачной среде с дисперсией, было упомянуто в § 81 [1]). Таким образом, имеем

$$\delta\tilde{U} = -\delta\varepsilon_{ik}\frac{E_iE_k^*}{16\pi} = \delta\eta_{ik}\frac{D_iD_k^*}{16\pi} \qquad (101,24)$$

(лишний множитель 1/2 учитывает представление **E** в комплексном виде); последнее равенство в (101,24) — следствие того, что в силу определения $\varepsilon_{il}\eta_{lk}=\delta_{ik}$ имеем $\varepsilon_{il}\delta\eta_{lk} = -\eta_{lk}\delta\varepsilon_{il}$ [2]).

Понимая теперь варьирование диэлектрической проницаемости как результат изменения постоянного магнитного поля, пишем

$$-\frac{\mathbf{B}}{4\pi} = \frac{\partial\tilde{U}_0}{\partial\mathbf{H}} + \frac{\partial\eta_{ik}}{\partial\mathbf{H}}\frac{D_iD_k^*}{16\pi},$$

где $\tilde{U}_0$ относится к среде в отсутствие электрического поля. Если среда сама по себе немагнитна ($\mu=1$), то $\partial\tilde{U}_0/\partial\mathbf{H} = -\mathbf{H}/4\pi$. Тогда намагниченность $\mathbf{M}=(\mathbf{B}-\mathbf{H})/4\pi$ равна

$$\mathbf{M} = -\frac{\partial\eta_{ik}}{\partial\mathbf{H}}\frac{D_iD_k^*}{16\pi}.$$

В отсутствие внешнего магнитного поля значение производной $\partial\eta_{ik}/\partial\mathbf{H}$ надо взять при $\mathbf{H}=0$. С η_{ik} из (101,6) и (101,15) получим окончательно следующее выражение для намагниченности, создаваемой переменным электрическим полем:

$$M_l = -\frac{i}{16\pi}e_{ikm}f_{ml}D_iD_k^*; \qquad (101,25)$$

она квадратична по электрическому полю. Если в отсутствие магнитного поля среда изотропна, то $f_{ml}=f\delta_{ml}$ и тогда

$$\mathbf{M} = -\frac{if}{16\pi}[\mathbf{DD}^*]. \qquad (101,26)$$

---

[1]) Напомним, что знак $\sim$ над U относится здесь к магнитным, а не электрическим переменным! Для упрощения записи опускаем знак усреднения по времени над $\tilde{U}$.

[2]) Для прямого вывода формулы (101,24) следовало бы рассмотреть заполненный диэлектриком резонатор — вместо рассмотренного в § 81 колебательного контура. Вычислив изменение частоты при малом изменении диэлектрической проницаемости (ср. задачу 4 к § 90) и воспользовавшись теоремой об адиабатическом инварианте, найдем изменение энергии резонатора.

Для линейно поляризованного поля вектор $\mathbf{D}$ может отличаться от вещественного лишь фазовым множителем; тогда $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}^*$ коллинеарны и выражение (101,25) или (101,26) обращается в нуль. Таким образом, намагничение возникает только под действием вращающегося электрического поля. Этот эффект в некотором смысле обратен эффекту вращения плоскости поляризации в магнитном поле и выражается через тот же тензор f_{ik}; его называют поэтому *обратным эффектом Фарадея*.

Задачи

1. Показать прямым расчетом, что направление среднего (по времени) вектора Пойнтинга в волне, распространяющейся в прозрачной гиротропной среде, совпадает с направлением групповой скорости.

Решение. Согласно (59,9а)

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re}[\mathbf{E}^*\mathbf{H}],$$

причем $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ выражены в комплексном виде. Поступая аналогично выводу (97,16), умножаем равенства (97,15) соответственно на $\mathbf{E}^*$ и $\mathbf{H}^*$:

$$\mathbf{E}^*\delta\mathbf{D} = \mathbf{H}^*\delta\mathbf{H} + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}]\,\delta\mathbf{n},$$
$$\mathbf{H}^*\delta\mathbf{H} = \mathbf{D}^*\delta\mathbf{E} + [\mathbf{E}\mathbf{H}^*]\,\delta\mathbf{n}.$$

Сложив их и заметив, что в силу эрмитовости тензора ε_{ik}: $\mathbf{E}^*\delta\mathbf{D} = \mathbf{D}^*\delta\mathbf{E}$, найдем требуемый результат:

$$\delta\mathbf{n} \cdot \operatorname{Re}[\mathbf{E}^*\mathbf{H}] = 0.$$

2. Определить направления лучей при преломлении падающего из пустоты луча на поверхности изотропного тела в магнитном поле.

Решение. Направление лучевого вектора $\mathbf{s}$ определяется нормалью к поверхности волновых векторов; дифференцируя левую сторону уравнения (101,20) по компонентам вектора $\mathbf{n}$, найдем, что вектор $\mathbf{s}$ пропорционален $\mathbf{n} \pm \mathbf{g}/2n_0$. Квадрат этого выражения равен n_0^2; поэтому единичный вектор в направлении луча дается формулой

$$\frac{\mathbf{s}}{s} = \frac{1}{n_0}\left(\mathbf{n} \pm \frac{1}{2n_0}\mathbf{g}\right). \tag{1}$$

Обозначим угол падения посредством θ. Преломленные лучи не лежат, вообще говоря, в плоскости падения, и их направление определяется углом θ' с направлением нормали к поверхности и азимутом φ', отсчитываемым от плоскости падения. Выберем последнюю в качестве плоскости xz с осью z, перпендикулярной к преломляющей поверхности. При преломлении остаются постоянными компоненты n_x, n_y волнового вектора. В падающем луче они равны $n_x = \sin\theta$, $n_y = 0$. Подставив эти значения в (1), найдем x- и y-компоненты единичного вектора $\mathbf{s}/s$, непосредственно дающие направление преломленных лучей:

$$\sin\theta'\cos\varphi' = \frac{1}{n_0}\sin\theta \pm \frac{1}{2n_0^2}g_x,$$

$$\sin\theta'\sin\varphi' = \pm\frac{1}{2n_0^2}g_y.$$

При не слишком малых углах падения малым является азимут φ' и можно написать

$$\varphi' = \pm \frac{g_y}{2n_0 \sin\theta}, \quad \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{n_0} \pm \frac{g_x}{2n_0^2}.$$

При нормальном падении ($\theta = 0$) выбираем плоскость xz проходящей через вектор $\mathbf{g}$; тогда $\varphi' = 0$, а для θ' имеем

$$\theta' \approx \sin\theta' = \pm \frac{1}{2n_0^2} g_x.$$

Хотя в эту формулу и не входит g_z, но она неприменима, если $g_z = 0$, так как при взаимно перпендикулярных $\mathbf{n}$ и $\mathbf{g}$ недостаточно линейное приближение по полю.

3. Определить поляризацию отраженного света при нормальном падении линейно поляризованной волны из пустоты на поверхность изотропного тела в магнитном поле.

Решение. При нормальном падении направление волнового вектора остается неизменным при переходе волны во вторую среду. Поэтому во всех волнах (падающей, отраженной и преломленной) векторы $\mathbf{H}$ параллельны поверхности раздела (плоскость xy). Что же касается электрического вектора $\mathbf{E}$, то в падающей и отраженной волнах он тоже параллелен плоскости xy, а в преломленной волне, хотя $E_z \neq 0$, связь между x- и y-компонентами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ такая же, как в изотропном теле ($H_x = -nE_y$, $H_y = nE_x$). Если поляризация падающей волны совпадает с поляризацией одного из двух типов волн, которые могут распространяться в данной анизотропной (преломляющей) среде в данном направлении $\mathbf{n}$, то возникает всего одна преломленная волна с этой же поляризацией. В таких условиях задача формально не отличается от задачи об отражении от изотропного тела, и поля $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_0$ в отраженной и падающей волнах связаны друг с другом посредством

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1-n}{1+n} \mathbf{E}_0, \tag{1}$$

где n — соответствующий данной поляризации коэффициент преломления.

Линейную поляризацию можно рассматривать как результат сложения двух круговых поляризаций с противоположными направлениями вращения; если в падающей волне $\mathbf{E}_0$ направлен по оси x, то пишем $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0^+ + \mathbf{E}_0^-$, где

$$E_{0x}^+ = iE_{0y}^+ = {}^1/_2 E_0, \quad E_{0x}^- = -iE_{0y}^- = {}^1/_2 E_0.$$

Воспользовавшись для каждой из волн $\mathbf{E}_0^+$, $\mathbf{E}_0^-$ формулой (1) с соответствующим $n_\pm$ из (101,19), получим

$$E_{1x} = \frac{E_0}{2}\left[\frac{1-n_+}{1+n_+} + \frac{1-n_-}{1+n_-}\right] \approx E_0 \frac{1-n_0}{1+n_0},$$

$$E_{1y} = \frac{iE_0}{2}\left[\frac{1-n_-}{1+n_-} - \frac{1-n_+}{1+n_+}\right] \approx iE_0 \frac{g\cos\theta}{n_0(1+n_0)^2}$$

(θ — угол между направлением падения и вектором $\mathbf{g}$). Отсюда видно, что отраженная волна эллиптически поляризована, причем большая ось эллипса расположена по оси x, а отношение малой оси к большой равно

$$\frac{g\cos\theta}{n_0(n_0^2-1)}.$$

4. Определить предельный закон зависимости вектора гирации от частоты при больших значениях последней.

Решение. Вычисления аналогичны произведенным в § 78, с той разницей, что в уравнение движения электрона (заряд $e=-|e|$) надо добавить лоренцеву силу от внешнего постоянного магнитного поля $\mathbf{H}$:

$$m\frac{d\mathbf{v}'}{dt}=e\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}+\frac{e}{c}[\mathbf{v}'\mathbf{H}].$$

При соблюдении условия $\omega\gg|e|H/mc$ это уравнение можно решать последовательными приближениями. С точностью до члена первого порядка по $\mathbf{H}$ получим

$$\mathbf{v}'=\frac{ie}{m\omega}\mathbf{E}-\frac{e^2}{m^2\omega^2c}[\mathbf{EH}],$$

после чего найдем индукцию в виде

$$\mathbf{D}=\varepsilon(\omega)\mathbf{E}+if(\omega)[\mathbf{EH}],$$

где $\varepsilon(\omega)$ совпадает с (78,1), а

$$f(\omega)=-\frac{4\pi Ne^3}{cm^2\omega^3}=\frac{|e|}{2mc}\frac{d\varepsilon}{d\omega}$$

(*H. Becquerel*, 1897).

§ 102. Динамооптические явления

Наряду с электро- и магнитооптическими эффектами, существуют и другие случаи изменения оптической симметрии среды под влиянием внешних воздействий.

Сюда относится прежде всего влияние упругих деформаций на оптические свойства твердых тел. В частности, в результате деформации изотропное твердое тело может стать оптически анизотропным. Эти явления описываются введением в $\varepsilon_{ik}(\omega)$ дополнительных членов, пропорциональных компонентам тензора деформации. Соответствующие формулы имеют вид, совпадающий с формулами (16,1) и (16,6), которые были написаны для статической диэлектрической проницаемости, с той лишь разницей, что стоящие в них коэффициенты являются теперь функциями частоты. Так, при деформации изотропного тела

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon^{(0)}\delta_{ik}+a_1u_{ik}+a_2u_{ll}\delta_{ik}. \qquad (102,1)$$

Коэффициенты $a_1(\omega)$ и $a_2(\omega)$ называют *упругооптическими постоянными*.

Другой случай — это возникновение оптической анизотропии в неоднородно движущейся жидкости. Соответствующее общее выражение диэлектрического тензора

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ik}^{(0)}+\lambda_1\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)+\frac{i}{2}\lambda_2\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) \qquad (102,2)$$

представляет собой первые члены разложения ε_{ik} по степеням производных скорости $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Условие отсутствия поглощения (эрмитовость ε_{ik}) требует вещественности коэффициентов $\lambda_1(\omega)$ и