

НОРМАЛЬНАЯ ФЕРМИ-ЖИДКОСТЬ**§ 1. Элементарные возбуждения в квантовой ферми-жидкости**

При температурах настолько низких, что де-бройлевская длина волны, отвечающая тепловому движению атомов жидкости, становится сравнимой с межатомными расстояниями, макроскопические свойства жидкости определяются квантовыми эффектами. Теория таких квантовых жидкостей представляет значительный принципиальный интерес, хотя в природе существуют лишь два объекта такого рода, являющиеся жидкостями в буквальном смысле этого слова; это — жидкие изотопы гелия (He^3 и He^4) при температурах $\sim 1\text{--}2\text{ К}$. Все другие вещества затвердевают значительно раньше, чем становятся существенными квантовые эффекты в них. Напомним в этой связи, что, согласно классической механике, все тела должны были бы быть твердыми при абсолютном нуле (см. V § 64); гелий же, благодаря особой слабости взаимодействия его атомов, остается жидким вплоть до температур, когда вступают в силу квантовые явления, после чего затвердевание уже перестает быть обязательным.

Вычисление термодинамических величин макроскопического тела требует знания спектра его уровней энергии. Разумеется, в случае системы сильно взаимодействующих частиц, каковой является квантовая жидкость, речь должна идти именно об уровнях, соответствующих квантовомеханическим стационарным состояниям всей жидкости в целом, а отнюдь не состояниям отдельных атомов. При вычислении статистической суммы в области достаточно низких температур должно учитываться лишь слабо возбужденные уровни энергии жидкости — уровни, расположенные не слишком высоко над основным.

Следующее обстоятельство имеет фундаментальное значение для всей теории. Всякое слабо возбужденное состояние макроскопического тела можно рассматривать в квантовой механике как совокупность отдельных *элементарных возбуждений*. Эти элементарные возбуждения ведут себя как некоторые *квазичастицы*, движущиеся в занимаемом телом объеме и обладающие определенными энергиями ϵ и импульсами p . Вид зависимости $\epsilon(p)$ (или, как говорят, *закон дисперсии* элементарных возбуждений) является важной характеристикой энергетического спектра тела. Подчеркнем лишний раз, что понятие элементарных возбуждений возникает как способ квантовомеханического

описания коллективного движения атомов тела и квазичастицы отнюдь не могут быть отождествлены с отдельными атомами или молекулами.

Существуют различные типы энергетических спектров, которыми могут, в принципе, обладать квантовые жидкости. В зависимости от типа спектра жидкость будет иметь также и совершенно различные макроскопические свойства. Мы начнем с изучения жидкости со спектром типа, который можно назвать *фермиевским*. Теория такой ферми-жидкости была создана Л. Д. Ландау (1956—1958 гг.); ему принадлежат результаты, излагаемые в §§ 1—4¹⁾.

Энергетический спектр квантовой жидкости фермиевского типа строится в известном смысле аналогично спектру идеального ферми-газа (из частиц со спином $1/2$). Основное состояние последнего соответствует заполнению частицами всех состояний внутри *фермиевской сферы*—сферы в импульсном пространстве с радиусом p_F , связанным с плотностью газа N/V (числом частиц в единице объема) формулой

$$\frac{N}{V} = 2 \frac{4\pi p_F^3}{3(2\pi\hbar)^3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3} \quad (1,1)$$

(см. V § 57). Возбужденные состояния газа возникают, когда частицы переходят из состояний заполненной сферы в какие-либо состояния с $p > p_F$.

В жидкости, разумеется, не существует квантовых состояний для отдельных частиц. Однако исходный пункт для построения спектра ферми-жидкости состоит в утверждении, что классификация уровней энергии остается неизменной при постепенном «включении» взаимодействия между атомами, т. е. при переходе от газа к жидкости. В этой классификации роль частиц газа переходит к элементарным возбуждениям (квазичастицам), число которых совпадает с числом атомов и которые подчиняются статистике Ферми.

Сразу же отметим, что спектром такого типа может обладать, очевидно, только жидкость из частиц с полуцелым спином — состояние системы из бозонов (частиц с целым спином) не может описываться в терминах квазичастиц, подчиняющихся статистике Ферми. В то же время следует подчеркнуть, что спектр этого типа не может быть универсальным свойством всех таких жидкостей. Тип спектра зависит также и от конкретного характера взаимодействия между атомами. Простое соображение

¹⁾ Забегая вперед, сразу же уточним, во избежание недоразумений, что речь идет о несверхтекучей (или, как говорят, *нормальной*) ферми-жидкости. Таковой является жидкий изотоп He^3 (с оговоркой, которая будет сделана в примечании на стр. 263).

делает это обстоятельство очевидным: если взаимодействие таково, что в его результате атомы стремятся ассоциироваться в пары, то в пределе мы получили бы молекулярную жидкость, состоящую из частиц (молекул) с целым спином, для которой рассматриваемый спектр заведомо невозможен.

Каждая из квазичастиц обладает определенным импульсом p (мы еще вернемся к вопросу о справедливости этого утверждения). Пусть $n(p)$ есть функция распределения квазичастиц по импульсам, нормированная условием

$$\int n d\tau = \frac{N}{V}, \quad d\tau = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

(это условие будет уточнено ниже). Упомянутый выше принцип классификации состоит в предположении, что задание этой функции однозначно определяет энергию E жидкости и что основное состояние, соответствует функции распределения, в которой заняты все состояния внутри ферми-сферы с радиусом p_F , связанным с плотностью жидкости той же формулой (1,1), что и в случае идеального газа.

Важно подчеркнуть, что полная энергия жидкости E отнюдь не сводится к сумме энергий ϵ квазичастиц. Другими словами, E представляет собой функционал от функции распределения, не сводящийся к интегралу $\int n\epsilon d\tau$ (как это имеет место для идеального газа, где квазичастицы совпадают с истинными частицами и не взаимодействуют друг с другом). Поскольку первичным понятием является именно E , то возникает вопрос об определении энергии квазичастиц с учетом их взаимодействия.

Для этого рассмотрим изменение E при бесконечно малом изменении функции распределения. Оно должно, очевидно, определяться интегралом от выражения, линейного по вариации δn , т. е. имеет вид

$$\frac{\delta E}{V} = \int \epsilon(p) \delta n d\tau.$$

Величина ϵ есть вариационная производная от энергии E по функции распределения. Она соответствует изменению энергии системы при добавлении одной квазичастицы с импульсом p , и именно эта величина играет роль гамильтоновой функции квазичастицы в поле других частиц. Она тоже является функционалом функции распределения, т. е. вид функции $\epsilon(p)$ зависит от распределения всех частиц в жидкости.

Отметим в этой связи, что элементарное возбуждение в рассматриваемом типе спектра можно в известном смысле трактовать как атом в самосогласованном поле других атомов. Эту

самосогласованность нельзя, однако, понимать в обычном в квантовой механике смысле. Она имеет здесь более глубокий характер; в гамильтониане атома учитывается влияние окружающих частиц не только на потенциальную энергию, но меняется также и зависимость оператора кинетической энергии от оператора импульса.

До сих пор мы отвлекались от наличия у квазичастиц спина. Так как спин является квантовомеханической величиной, то он не может рассматриваться классически, ввиду чего мы должны считать функцию распределения статистической матрицей в отношении спина. Энергия же элементарного возбуждения ϵ в общем случае является не только функцией от импульса, но и оператором по отношению к спиновым переменным, который можно выразить через оператор спина квазичастицы \hat{s} . В однородной и изотропной жидкости (не находящейся в магнитном поле и не ферромагнитной) оператор \hat{s} может входить в скалярную функцию ϵ тоже лишь в виде скаляров \hat{s}^2 или $(\hat{sp})^2$; первая степень произведения \hat{sp} недопустима, поскольку в виду аксиальности вектора спина она является псевдоскаляром. Квадрат $\hat{s}^2 = s(s+1)$, а для спина $s = 1/2$ сводится к не зависящей от \hat{s} постоянной также и скаляр $(\hat{sp})^2 = p^2/4$. Таким образом, в этом случае энергия квазичастицы вовсе не зависит от оператора спина, т. е. все уровни энергии квазичастиц двукратно вырождены.

По существу утверждение о наличии спина у квазичастицы и выражает факт существования этого вырождения. В этом смысле можно утверждать, что спин квазичастиц в данном типе спектра всегда равен $1/2$, вне зависимости от величины спина истинных частиц жидкости. Действительно, для любого отличного от $1/2$ спина s члены вида $(\hat{sp})^2$ привели бы к расщеплению $(2s+1)$ -кратно вырожденных уровней на $(2s+1)/2$ уровней с двукратным вырождением. Другими словами, появляются $(2s+1)/2$ различных ветвей функции $\epsilon(p)$, каждая из которых соответствует «квазичастицам со спином $1/2$ ».

Как уже было отмечено, с учетом спина квазичастиц функция распределения становится матрицей или оператором $\hat{n}(p)$ по отношению к спиновым переменным. В явном виде этот оператор записывается как эрмитова статистическая матрица $n_{\alpha\beta}(p)$, где α, β — спиновые матричные индексы, пробегающие два значения $\pm 1/2$. Диагональные матричные элементы определяют числа квазичастиц в определенных спиновых состояниях. Поэтому условие нормировки функции распределения квазичастиц надо писать теперь в виде

$$\text{Sp} \int \hat{n} d\tau \equiv \int n_{\alpha\alpha} d\tau = \frac{N}{V}, \quad d\tau = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \quad (1,2)$$

(символ Sp означает взятие следа матрицы по спиновым индексам)¹⁾.

Оператором — матрицей по спиновым переменным — является в общем случае также и энергия квазичастицы $\hat{\epsilon}$. Ее определение надо записывать так:

$$\frac{\delta E}{V} = \text{Sp} \int \hat{\epsilon} \delta \hat{n} d\tau \equiv \int \epsilon_{\alpha\beta} \delta n_{\beta\alpha} d\tau. \quad (1,3)$$

Если спиновая зависимость функции распределения и энергии отсутствует, т. е. $n_{\alpha\beta}$ и $\epsilon_{\alpha\beta}$ сводятся к единичной матрице

$$n_{\alpha\beta} = n \delta_{\alpha\beta}, \quad \epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon \delta_{\alpha\beta}, \quad (1,4)$$

то взятие следа в (1,2—3) сводится просто к умножению на 2:

$$2 \int n d\tau = \frac{N}{V}, \quad \frac{\delta E}{V} = 2 \int \epsilon \delta n d\tau. \quad (1,5)$$

Легко видеть, что в статистическом равновесии функция распределения квазичастиц имеет вид распределения Ферми, причем роль энергии играет определенная согласно (1,3) величина $\hat{\epsilon}$. Действительно, в силу совпадения классификационных свойств уровней энергии жидкости и идеального ферми-газа энтропия S жидкости определяется таким же комбинаторным выражением

$$\frac{S}{V} = - \text{Sp} \int \{ \hat{n} \ln \hat{n} - (1 - \hat{n}) \ln (1 - \hat{n}) \} d\tau, \quad (1,6)$$

как и в случае газа (см. V § 55). Варьируя это выражение при дополнительных условиях постоянства полного числа частиц и полной энергии

$$\frac{\delta N}{V} = \text{Sp} \int \delta \hat{n} d\tau = 0, \quad \frac{\delta E}{V} = \text{Sp} \int \hat{\epsilon} \delta \hat{n} d\tau = 0,$$

мы получим искомое распределение

$$\hat{n} = [e^{(\hat{\epsilon} - \mu)/T} + 1]^{-1}, \quad (1,7)$$

где μ — химический потенциал жидкости.

При не зависящей от спина энергии квазичастиц формула (1,7) означает такую же связь между величинами n и ϵ :

$$n = [e^{(\epsilon - \mu)/T} + 1]^{-1}. \quad (1,8)$$

При температуре $T = 0$ химический потенциал совпадает с граничной энергией на поверхности сферы Ферми:

$$\mu |_{T=0} = \epsilon_F \equiv \epsilon(p_F). \quad (1,9)$$

¹⁾ Здесь и везде ниже по дважды повторяющимся индексам, как обычно, подразумевается суммирование.

Подчеркнем, что, несмотря на формальную аналогию выражения (1,8) с обычным распределением Ферми, оно не тождественно с ним: поскольку ϵ само есть функционал от n , формула (1,8) представляет собой, строго говоря, сложное неявное определение n .

Вернемся к сделанному предположению о том, что каждой квазичастице может быть приписан определенный импульс. Условие справедливости этого предположения требует, чтобы неопределенность импульса (связанная с конечностью длины свободного пробега квазичастицы) была мала не только по сравнению с величиной самого импульса, но и по сравнению с шириной Δp «области размытости» распределения — области, в которой оно существенно отличается от «ступенчатой» функции¹⁾:

$$\theta(p) \equiv \theta(p) = \begin{cases} 1 & \text{при } p < p_F, \\ 0 & \text{при } p > p_F. \end{cases} \quad (1,10)$$

Легко видеть, что это условие соблюдается, если распределение $n(p)$ отличается от (1,10) лишь в малой области вблизи поверхности ферми-сферы. Действительно, в силу принципа Паули взаимно рассеиваться могут только квазичастицы в области размытости распределения, причем в результате рассеяния они должны переходить в свободные состояния в той же области. Поэтому вероятность столкновения пропорциональна квадрату ширины этой области. Соответственно пропорциональна $(\Delta p)^2$ и неопределенность энергии, а с нею и неопределенность импульса квазичастицы. Отсюда ясно, что при достаточно малом Δp неопределенность импульса будет мала не только по сравнению с p_F , но и по сравнению с Δp .

Таким образом, излагаемый метод справедлив только для таких возбужденных состояний жидкости, которые описываются функцией распределения квазичастиц, отличающейся от «ступеньки» лишь в узкой области вблизи поверхности Ферми. В частности, для термодинамически равновесных распределений допустимы лишь достаточно низкие температуры. Ширина (по энергии) области размытости равновесного распределения порядка T . Квантовая же неопределенность энергии квазичастицы, связанная со столкновениями, — порядка величины \hbar/τ , где τ — время свободного пробега квазичастицы. Поэтому условие

¹⁾ Отметим для дальнейшего, что производная

$$\theta'(p) = -\delta(p - p_F).$$

Действительно, обе стороны этого равенства дают одинаковый результат (единицу) при интегрировании по любому интервалу p , содержащему точку $p = p_F$.

применимости теории

$$\hbar/\tau \ll T. \quad (1,11)$$

При этом, согласно сказанному выше, время τ обратно пропорционально квадрату ширины области размытости, т. е.

$$\tau \propto T^{-2},$$

так что (1,11) заведомо выполняется при $T \rightarrow 0$. Для жидкости, в которой взаимодействие между частицами не является слабым, все энергетические параметры по порядку величины совпадают с граничной энергией ε_F ; в этом смысле условие (1,11) эквивалентно условию $T \ll |\varepsilon_F|^{(1)}$.

Для распределений, близких к «ступенчатому» (распределение при $T=0$), можно, в первом приближении, заменить функционал ε его значением, вычисленным для $n(\mathbf{p}) = \theta(p)$. Тогда ε становится определенной функцией величины импульса, и формула (1,7) становится обычным распределением Ферми.

При этом вблизи поверхности ферми-сферы, где функция $\varepsilon(\mathbf{p})$ только и имеет непосредственный физический смысл, ее можно разложить по степеням разности $p - p_F$. Имеем

$$\varepsilon - \varepsilon_F \approx v_F(p - p_F), \quad (1,12)$$

где

$$v_F = \left. \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right|_{p=p_F} \quad (1,13)$$

есть «скорость» квазичастиц на ферми-поверхности. В идеальном ферми-газе, где квазичастицы тождественны с истинными частицами, имеем $\varepsilon = p^2/2m$, так что $v_F = p_F/m$. По аналогии можно ввести для ферми-жидкости величину

$$m^* = p_F/v_F, \quad (1,14)$$

назвав ее *эффективной массой* квазичастицы; эта величина положительна (см. конец § 2).

В терминах введенных таким образом величин условие применимости теории можно записать как $T \ll v_F p_F$, причем реальным смыслом обладают лишь квазичастицы с импульсами p , для которых $|p - p_F| \ll p_F$. Подчеркнем лишний раз последнее обстоятельство и отметим, что оно придает в особенности нетривиальный характер соотношению (1,1) между p_F и плотностью жидкости, поскольку его наглядный вывод (для ферми-газа) основан на представлении о частицах в состояниях,

¹⁾ Для жидкого He^3 , однако, область количественной применимости теории, как показывает эксперимент, фактически ограничена температурами $T \leq 0,1\text{K}$ (между тем как $|\varepsilon_F| \approx 2,5\text{K}$).

заполняющих всю ферми-сферу, а не только окрестность ее поверхности¹⁾.

Эффективная масса определяет, в частности, энтропию S и теплоемкость C жидкости при низких температурах. Они даются той же формулой, что и для идеального газа (V § 58), в которой надо только заменить массу частицы m эффективной массой m^* :

$$S = C = V\gamma T, \quad \gamma = \frac{m^* p_F}{3\hbar^3} = \left(\frac{\pi}{3}\right)^{2/3} \frac{m^*}{\hbar^2} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3} \quad (1,15)$$

(ввиду линейной зависимости от T величины S и C совпадают). Действительно, выражение (1,6) энтропии через функцию распределения одинаково для жидкости и для газа, а при вычислении этого интеграла существенна лишь область импульсов вблизи p_F , в которой функции распределения квазичастиц в жидкости и частиц в газе даются одним и тем же выражением (1,8)²⁾.

Перед тем, как продолжить развитие теории, сделаем следующее замечание. Хотя излагаемый способ введения понятия квазичастиц в ферми-жидкости в полной аналогии с частицами газа наиболее удобен для систематического построения теории, связанная с ним физическая картина имеет тот недостаток, что в ней фигурирует ненаблюдаемая заполненная ферми-сфера квазичастиц. Этот недостаток можно было бы устранить формулировкой, в которой элементарные возбуждения появляются только при $T \neq 0$. В такой картине роль элементарных возбуждений играют квазичастицы вне ферми-сферы и «дырки» внутри нее; первым надо приписать (в приближении, отвечающем формуле (1,12)) энергию $\epsilon = v_F(p - p_F)$, а вторым $\epsilon = v_F(p_F - p)$. Статистическое распределение тех и других дается формулой распределения Ферми с равным нулю химическим потенциалом (в соответствии с тем, что число элементарных возбуждений при этом не постоянно, а само определяется температурой³⁾)

$$n = [e^{\epsilon/T} + 1]^{-1}. \quad (1,16)$$

¹⁾ Доказательство соотношения (1,1) требует применения более сложных математических методов и будет дано ниже, в § 20.

²⁾ Для жидкого He^3 (при нулевом давлении): $p_F/\hbar = 0,8 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}$; $m^* = 3,1 m$ (He^3); p_F определяется по плотности жидкости; m^* — по теплоемкости.

³⁾ Напомним (ср. V § 63), что в таких условиях число квазичастиц $N_{\text{кв}}$ определяется условием термодинамического равновесия — минимальностью свободной энергии F как функции $N_{\text{кв}}$ при заданных температуре и объеме: $(\partial F / \partial N_{\text{кв}})_{T, V} = 0$; но эта производная и есть «химический потенциал квазичастиц» (не смешивать его с химическим потенциалом μ жидкости, определенным производной от F по числу истинных частиц N).

Элементарные возбуждения в этой картине появляются или исчезают лишь парами, так что полные числа возбуждений с импульсами $p > p_F$ и $p < p_F$ всегда одинаковы.

Отметим также, что при таком определении элементарных возбуждений их энергия непременно положительна: это есть превышение энергии возбужденного уровня над энергией нормального уровня системы. Энергия же квазичастиц, определенная согласно (1,3), может быть как положительной, так и отрицательной.

Более того, для жидкости при нулевых температуре и давлении величина $\epsilon_F = \mu$ заведомо отрицательна, а потому отрицательны и близкие к ϵ_F значения ϵ . Это ясно из того, что при $T=0$ и $P=0$ величина $-\mu$ совпадает с положительной величиной — предельным значением отнесенной к одной частице теплотой испарения жидкости.

§ 2. Взаимодействие квазичастиц

Являясь функционалом от функции распределения квазичастиц, их энергия меняется при изменении этой функции. Изменение энергии при малом отклонении δn функции распределения от «ступеньки» (1,10) должно иметь вид

$$\delta \epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \int f_{\alpha\gamma, \beta\delta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{\delta\gamma}(\mathbf{p}') d\tau' \quad (2,1)$$

или, в более символическом виде,

$$\delta \hat{\epsilon}(\mathbf{p}) = \text{Sp}' \int \hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta \hat{n}(\mathbf{p}') d\tau',$$

где Sp' означает взятие следа по паре спиновых индексов, отвечающих импульсу \mathbf{p}' . Функцию \hat{f} можно назвать *функцией взаимодействия* квазичастиц (в ферми-газе $\hat{f} \equiv 0$). По своему определению эта функция представляет собой вторую вариационную производную от полной энергии жидкости E и поэтому симметрична по переменным \mathbf{p}, \mathbf{p}' и соответствующим им парам спиновых индексов:

$$f_{\alpha\gamma, \beta\delta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = f_{\gamma\alpha, \delta\beta}(\mathbf{p}', \mathbf{p}). \quad (2,2)$$

С учетом изменения (2,1) энергия квазичастиц вблизи поверхности ферми-сферы дается суммой

$$\hat{\epsilon}(\mathbf{p}) - \epsilon_F = v_F(p - p_F) + \text{Sp}' \int \hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta \hat{n}(\mathbf{p}') d\tau'. \quad (2,3)$$

В частности, для термодинамически равновесных распределений