Элементарные возбуждения в этой картине появляются или исчезают лишь парами, так что полные числа возбуждений с импульсами $p > p_F$ и $p < p_F$ всегда одинаковы.

Отметим также, что при таком определении элементарных возбуждений их энергия непременно положительна: это есть превышение энергии возбужденного уровня над энергией нормального уровня системы. Энергия же квазичастиц, определенная согласно (1,3), может быть как положительной, так и отрицательной.

Более того, для жидкости при нулевых температуре и давлении величина $\varepsilon_F = \mu$ заведомо отрицательна, а потому отрицательны и близкие к ε_F значения ε. Это ясно из того, что при $T = 0$ и $P = 0$ величина $-\mu$ совпадает с положительной величиной — предельным значением отнесенной к одной частице теплотой испарения жидкости.

§ 2. Взаимодействие квазичастиц

Являясь функционалом от функции распределения квазичастиц, их энергия меняется при изменении этой функции. Изменение энергии при малом отклонении δn функции распределения от «ступеньки» (1,10) должно иметь вид

$$\delta\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \int f_{\alpha\gamma,\, \beta\delta}(\mathbf{p},\, \mathbf{p}')\, \delta n_{\delta\gamma}(\mathbf{p}')\, d\tau' \tag{2,1}$$

или, в более символическом виде,

$$\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{p}) = \mathrm{Sp}' \int \hat{f}(\mathbf{p},\, \mathbf{p}')\, \delta\hat{n}(\mathbf{p}')\, d\tau',$$

где Sp' означает взятие следа по паре спиновых индексов, отвечающих импульсу $\mathbf{p}'$. Функцию $\hat{f}$ можно назвать *функцией взаимодействия* квазичастиц (в ферми-газе $\hat{f} \equiv 0$). По своему определению эта функция представляет собой вторую вариационную производную от полной энергии жидкости E и поэтому симметрична по переменным $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}'$ и соответствующим им парам спиновых индексов:

$$f_{\alpha\gamma,\, \beta\delta}(\mathbf{p},\, \mathbf{p}') = f_{\gamma\alpha,\, \delta\beta}(\mathbf{p}',\, \mathbf{p}). \tag{2,2}$$

С учетом изменения (2,1) энергия квазичастиц вблизи поверхности ферми-сферы дается суммой

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{p}) - \varepsilon_F = v_F(p - p_F) + \mathrm{Sp}' \int \hat{f}(\mathbf{p},\, \mathbf{p}')\, \delta\hat{n}(\mathbf{p}')\, d\tau'. \tag{2,3}$$

В частности, для термодинамически равновесных распределений второй член в формуле (2,3) определяет зависимость энергии квазичастицы от температуры. Отклонение $\delta\hat{n}'$ заметно отлично от нуля только в узком слое значений $\mathbf{p}'$ вблизи поверхности ферми-сферы, и в таком же слое находятся импульсы $\mathbf{p}$ реальных квазичастиц. Поэтому функцию $\hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ в формулах (2,1), (2,3) фактически можно заменить ее значением на самой этой поверхности, т. е. положить $p = p' = p_F$, так что $\hat{f}$ будет зависеть только от направлений векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$.

Спиновая зависимость функции $\hat{f}$ связана как с релятивистскими эффектами (спин-спиновое и спин-орбитальное взаимодействия), так и с обменным взаимодействием. Последнее наиболее существенно. С его учетом функция взаимодействия квазичастиц имеет (на ферми-поверхности) вид

$$\frac{p_F m^*}{\pi^2 \hbar^3} \hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = F(\vartheta) + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}' G(\vartheta), \tag{2,4}$$

где $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}'$ — матрицы Паули, действующие на соответствующие (т. е. отвечающие переменным $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$) спиновые индексы, а F и G — две функции угла ϑ между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ [1]). Вид этого выражения связан с характерным свойством обменного взаимодействия: оно не зависит от ориентации полного момента системы в пространстве; поэтому операторы двух спинов могут входить в него лишь в виде скалярного произведения. Определенные, согласно (2,4), функции F и G безразмерны. Введенный для этой цели в левой стороне (2,4) множитель представляет собой число состояний квазичастицы на ферми-поверхности, отнесенное к единичному интервалу энергий:

$$\nu(\varepsilon_F) = \frac{2d\tau}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=\varepsilon_F} = \frac{2\cdot 4\pi p_F^2}{(2\pi\hbar)^3}\left(\frac{dp}{d\varepsilon}\right)_{p_F}$$

или

$$\nu_F = \frac{p_F^2}{\pi^2\hbar^3 v_F} = \frac{p_F m^*}{\pi^2\hbar^3}. \tag{2,5}$$

Поскольку след матриц Паули равен нулю, то после взятия следа Sp' второй член в (2,4) исчезает, так что $\mathrm{Sp}'\hat{f}$ не зависит уже и от $\boldsymbol{\sigma}$. Такая независимость имеет место в действительности также и при учете спин-орбитального и спин-спинового взаимодействий. Дело в том, что скалярная функция $\mathrm{Sp}'\hat{f}$ могла

[1]) В явной матричной форме:

$$\frac{p_F m^*}{\pi^2\hbar^3} f_{\alpha\gamma,\,\beta\delta} = F\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + G\sigma_{\alpha\beta}\sigma_{\gamma\delta}. \tag{2,4a}$$

бы содержать оператор спина лишь в виде произведения $\hat{\mathbf{s}}[\mathbf{pp}']$ двух аксиальных векторов $\hat{\mathbf{s}}$ и $[\mathbf{pp}']$ (выражения же, квадратичные по компонентам $\hat{\mathbf{s}}$, можно не рассматривать, так как для спина 1/2 они сводятся к членам, линейным по $\hat{\mathbf{s}}$ и не содержащим $\hat{\mathbf{s}}$ вовсе). Но это произведение не инвариантно по отношению к обращению времени и потому не может войти в инвариантную величину $\mathrm{Sp}'\hat{f}$.

Введем удобное для дальнейшего обозначение

$$f_{\alpha\gamma,\,\beta\gamma}(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')=\delta_{\alpha\beta}f(\mathbf{p},\ \mathbf{p}'),\qquad f=\frac{1}{2}\,\mathrm{Sp}\,\mathrm{Sp}'\hat{f}. \tag{2,6}$$

Из выражения (2,4) имеем

$$\frac{p_F m^*}{\pi^2\hbar^3}\,f(\vartheta)=2F(\vartheta). \tag{2,7}$$

Функция взаимодействия квазичастиц удовлетворяет определенному интегральному соотношению, следующему из принципа относительности Галилея. Прямым следствием этого принципа является совпадение импульса единицы объема жидкости с плотностью потока ее массы. Скорость квазичастицы есть $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$, так что поток квазичастиц дается интегралом

$$\mathrm{Sp}\int n\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{p}}\,d\tau.$$

Поскольку число квазичастиц в жидкости совпадает с числом истинных частиц, то ясно, что полный перенос массы квазичастицами получится умножением потока их числа на массу m истинной частицы. Таким образом, получим следующее равенство:

$$\mathrm{Sp}\int \mathbf{p}\hat{n}\,d\tau=\mathrm{Sp}\int m\,\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{p}}\,\hat{n}\,d\tau. \tag{2,8}$$

Положив $n_{\alpha\beta}=n\delta_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\alpha\beta}=\varepsilon\delta_{\alpha\beta}$, варьируем обе стороны (2,8). Использовав (2,1) и обозначение f из (2,6), получим

$$\int \mathbf{p}\delta n\,d\tau=m\int\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\,\delta n\,d\tau+m\int\frac{\partial f(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')}{\partial\mathbf{p}}\,n\,\delta n'\,d\tau\,d\tau'=$$
$$=m\int\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}\,\delta n\,d\tau-m\int f(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\,\frac{\partial n'}{\partial\mathbf{p}'}\,\delta n\,d\tau\,d\tau',$$

где $n'\equiv n(\mathbf{p}')$ (во втором интеграле заменено обозначение переменных и произведено интегрирование по частям). Ввиду произвольности δn отсюда следует искомое соотношение

$$\frac{\mathbf{p}}{m}=\frac{\partial\varepsilon}{\partial\mathbf{p}}-\int f(\mathbf{p},\ \mathbf{p}')\,\frac{\partial n(\mathbf{p}')}{\partial\mathbf{p}'}\,d\tau' \tag{2,9}$$

Для ступенчатой функции

$$n(\mathbf{p}') = \theta(p')$$

производная $\partial n'/\partial \mathbf{p}'$ сводится к δ-функции:

$$\frac{\partial \theta(p)}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{p}}{p}\,\delta(p - p_F). \tag{2,10}$$

Подставив в (2,9) функцию $\varepsilon(\mathbf{p})$ из (1,12), заменив затем везде импульс $\mathbf{p} = p\mathbf{n}$ значением $\mathbf{p}_F = p_F\mathbf{n}$ на ферми-поверхности и умножив обе стороны равенства на $\mathbf{p}_F$, получим следующее соотношение между массой m истинных частиц и эффективной массой квазичастиц:

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*} + \frac{p_F}{(2\pi\hbar)^3} \int f(\vartheta) \cos\vartheta \, do', \tag{2,11}$$

где do' — элемент телесного угла в направлении $\mathbf{p}'$. Если подставить сюда для $f(\vartheta)$ выражение (2,7), то это равенство принимает вид

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \overline{F(\vartheta)\cos\vartheta}, \tag{2,12}$$

где черта означает усреднение по направлениям (т. е. интегрирование по $do'/4\pi = \sin\vartheta\, d\vartheta/2$).

Вычислим еще сжимаемость ферми-жидкости (при абсолютном нуле), т. е. величину $u^2 = \partial P/\partial \rho$ [1]). Плотность жидкости $\rho = mN/V$, так что

$$u^2 = -\frac{V^2}{mN}\frac{\partial P}{\partial V}.$$

Для вычисления этой производной удобно выразить ее через производную от химического потенциала. Заметив, что последний зависит от N и V только в виде отношения N/V, а также, что при $T = \text{const} = 0$ дифференциал $d\mu = V dP/N$, имеем

$$\frac{\partial \mu}{\partial N} = -\frac{V}{N}\frac{\partial \mu}{\partial V} = -\frac{V^2}{N^2}\frac{\partial P}{\partial V},$$

так что

$$u^2 = \frac{N}{m}\frac{\partial \mu}{\partial N}. \tag{2,13}$$

---

[1]) При $T = 0$ также и $S = 0$, так что нет необходимости различать изотермическую и адиабатическую сжимаемости. Величина u определена как известное выражение скорости звука в жидкости. Следует, однако, иметь в виду, что фактически при $T = 0$ обычный звук вообще не может распространяться в ферми-жидкости — см. начало § 5.

Поскольку $\mu=\varepsilon_F$ при $T=0$, то изменение $\delta\mu$ при изменении числа частиц на δN равно

$$\delta\mu=\int f(\mathbf{p}_F,\ \mathbf{p}')\,\delta n'\,d\tau'+\frac{\partial\varepsilon_F}{\partial p_F}\delta p_F. \tag{2,14}$$

Первый член в этом выражении — изменение величины $\varepsilon(p_F)$ благодаря изменению функции распределения. Второй же член связан с тем, что изменение полного числа частиц меняет также и значение предельного импульса: в силу (1,1) имеем $\delta N=$ $=Vp_F^2\delta p_F/\pi^2\hbar^3$. Поскольку $\delta n'$ заметно отлично от нуля лишь при $p'\approx p_F$, то, заменив в интеграле функцию f ее значением на ферми-поверхности, можем написать

$$\int f\,\delta n'\,d\tau'\approx\frac{1}{2}\int f\,do'\int\delta n'\,\frac{2d\tau'}{4\pi}=\frac{1}{2}\,4\pi\overline{f}\,\frac{\delta N}{4\pi V}.$$

Подставив это выражение в (2,14) и введя m^* согласно $\partial\varepsilon_F/\partial p_F=$ $=p_F/m^*$, получим

$$\frac{\partial\mu}{\partial N}=\frac{\overline{f}}{2V}+\frac{\pi^2\hbar^3}{p_Fm^*V}. \tag{2,15}$$

Наконец, взяв $1/m^*$ из (2,11) и снова учтя (1,1), получим окончательно

$$u^2=\frac{p_F^2}{3m^2}+\frac{1}{3m}\left(\frac{p_F}{2\pi\hbar}\right)^3\int f(\vartheta)\,(1-\cos\vartheta)\,do'. \tag{2,16}$$

С функцией $f(\vartheta)$ из (2,7) и с использованием (2,12) это выражение можно привести к виду

$$u^2=\frac{p_F^2}{3mm^*}\,(1+\overline{F(\vartheta)}). \tag{2,17}$$

Функция $\hat{f}$ должна удовлетворять определенным условиям, возникающим из требования устойчивости основного состояния жидкости. Последнему отвечает заполнение всех состояний квазичастиц внутри ферми-сферы, и энергия этого состояния должна быть минимальна по отношению к произвольной малой деформации сферы. Не приводя всех вычислений, укажем здесь лишь их окончательный результат[1]). Его удобно сформулировать, разложив функции $F(\vartheta)$ и $G(\vartheta)$ из (2,4) по полиномам Лежандра, т. е. представив их в виде

$$F(\vartheta)=\sum_l(2l+1)\,F_lP_l(\cos\vartheta),\quad G(\vartheta)=\sum_l(2l+1)\,G_lP_l(\cos\vartheta) \tag{2,18}$$

---

[1]) См. *И. Я. Померанчук*, ЖЭТФ 35, 524 (1958).

(при таком определении коэффициентов F_l и G_l они совпадают со средними значениями произведений FP_l и GP_l). Тогда условия устойчивости записываются в виде неравенств

$$F_l+1>0, \tag{2,19}$$

$$G_l+1>0. \tag{2,20}$$

Сравнив условие (2,19) при $l=1$ с выражением (2,12) для эффективной массы, убеждаемся в положительности последней. Условие же (2,19) при $l=0$ обеспечивает положительность выражения (2,17).

§ 3. Магнитная восприимчивость ферми-жидкости

Квазичастица с отличным от нуля спином обладает, вообще говоря, также и магнитным моментом. Для спина 1/2 оператор этого момента имеет вид $\beta\sigma$ (z-проекция магнитного момента равна $\pm\beta$). Постоянная $2\beta/\hbar$, определяющая отношение магнитного момента квазичастицы к механическому ($\hbar/2$), совпадает со значением такой же постоянной для истинных частиц: очевидно, что величина этого отношения не меняется при любом способе сложения спинов частиц в спин квазичастицы.

Наличие у квазичастиц магнитного момента приводит, в свою очередь, к парамагнетизму жидкости. Вычислим соответствующую магнитную восприимчивость.

Для «свободной» квазичастицы оператор дополнительной энергии, приобретаемой ею в магнитном поле $\mathbf{H}$, был бы $-\beta\sigma\mathbf{H}$. Но в ферми-жидкости необходимо учесть тот факт, что в силу взаимодействия квазичастиц энергия каждой из них изменится еще и в результате изменения функции распределения в магнитном поле. При вычислении магнитной восприимчивости надо поэтому писать оператор изменения энергии квазичастицы в виде

$$\delta\hat{\varepsilon}=-\beta\sigma\mathbf{H}+\mathrm{Sp}'\int\hat{f}\delta\hat{n}'\,d\tau'. \tag{3,1}$$

Изменение же функции распределения само выражается через $\delta\varepsilon$ согласно $\delta\hat{n}=(\partial n/\partial\varepsilon)\,\delta\hat{\varepsilon}$ [1]; таким образом, для $\delta\hat{\varepsilon}$ получаем уравнение

$$\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{p})=-\beta\sigma\mathbf{H}+\mathrm{Sp}'\int\hat{f}(\mathbf{p},\mathbf{p}')\frac{dn'}{d\varepsilon'}\delta\hat{\varepsilon}(\mathbf{p}')\,d\tau'. \tag{3,2}$$

[1]) При вычислении добавки δn, зависящей от поля, изменение химического потенциала можно не учитывать. Изменение макроскопической величины μ в изотропной жидкости может быть лишь квадратичным по полю $\mathbf{H}$ (являющимся при вычислении восприимчивости малой величиной), между тем как $\delta\hat{\varepsilon}$ первого порядка малости по полю. Отметим также, что ввиду малости магнитной восприимчивости жидкости здесь можно не делать различия между напряженностью и индукцией поля в ней.