§ 4. Нулевой звук

Неравновесные состояния ферми-жидкости описываются функциями распределения квазичастиц, зависящими не только от импульсов, но также и от координат и времени. Эти функции $\hat{n}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ подчиняются кинетическому уравнению вида

$$\frac{d\hat{n}}{dt} = \mathrm{St}\,\hat{n}, \tag{4,1}$$

где $\mathrm{St}\,\hat{n}$—так называемый интеграл столкновений, определяющий изменение числа квазичастиц в данном элементе фазового объема, обусловленное их столкновениями друг с другом[1]).

Полная производная по времени в (4,1) учитывает как явную зависимость $\hat{n}$ от t, так и неявную зависимость, связанную с изменением координат, импульса и спиновых переменных квазичастицы согласно ее уравнениям движения. Специфика ферми-жидкости состоит в том, что поскольку энергия квазичастицы является функционалом от функции распределения, то в неоднородной жидкости вместе с $\hat{n}$ зависит от координат также и $\hat{\varepsilon}$.

Для распределений $\hat{n}$, слабо отличающихся от равновесного n_0, пишем

$$\hat{n}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = n_0(\mathbf{p}) + \delta\hat{n}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t). \tag{4,2}$$

При этом энергия квазичастицы $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_0 + \delta\hat{\varepsilon}$, где ε_0—энергия, отвечающая равновесному распределению, а $\delta\hat{\varepsilon}$ дается выражением (2,1), так что

$$\frac{\partial\hat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{r}} = \frac{\partial\delta\hat{\varepsilon}}{\partial\mathbf{r}} = \mathrm{Sp}'\int \hat{f}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')\,\frac{\partial\delta\hat{n}(\mathbf{p}')}{\partial\mathbf{r}}\,d\tau'. \tag{4,3}$$

В отсутствие внешнего магнитного поля ε_0 и n_0 от спина не зависят.

Явная зависимость $\hat{n}$ от времени дает в $d\hat{n}/dt$ член

$$\frac{\partial\hat{n}}{\partial t} = \frac{\partial\delta\hat{n}}{\partial t}.$$

---

[1]) Содержание этого параграфа предполагает знакомство с понятием кинетического уравнения и в этом смысле выпадает из профиля данного тома. Однако без кинетического уравнения (и его применения в этом и следующем параграфах) формулировка теории ферми-жидкости была бы недостаточно полна. Нам понадобится здесь лишь уравнение без интеграла столкновений; вопросы, связанные с конкретным видом интеграла столкновений, будут рассмотрены в другом томе, посвященном физической кинетике.

Зависимость же через координаты и импульс дает члены

$$\frac{\partial \hat{n}}{\partial \mathbf{r}} \dot{\hat{\mathbf{r}}} + \frac{\partial \hat{n}}{\partial \mathbf{p}} \dot{\hat{\mathbf{p}}}.$$

Роль гамильтоновой функции квазичастицы играет ее энергия $\hat{\varepsilon}$. В силу уравнений Гамильтона имеем

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} = \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\hat{\mathbf{p}}} = -\frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}}.$$

Поэтому имеем, с точностью до членов первого порядка по $\delta\hat{n}$:

$$\frac{\partial \delta\hat{n}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \delta\hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}}.$$

Наконец, изменение со временем функции $\hat{n}$ как оператора по спиновым переменным дается, по общим правилам квантовой механики, коммутатором

$$\frac{i}{\hbar} \{\hat{\varepsilon}, \hat{n}\}. \tag{4,4}$$

Однако при не зависящих от спина n_0 и ε_0 члены первого порядка по $\delta\hat{n}$ в этом коммутаторе отсутствуют.

Собирая написанные члены, получим уравнение

$$\frac{\partial \delta\hat{n}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \delta\hat{n}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \delta\hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} = \mathrm{St}\, \hat{n}. \tag{4,5}$$

Прежде, чем приступить к использованию кинетического уравнения, остановимся на условиях его применимости. Использовав классические (по координатам и импульсу) уравнения, мы тем самым предполагали движение квазичастиц квазиклассическим; это же предположение лежит по существу уже в основе самого описания жидкости функцией распределения, зависящей одновременно от координат и импульсов квазичастиц. Условие квазиклассичности состоит в малости де-бройлевской длины волны квазичастиц $\hbar/p_F$ по сравнению с характерной длиной L, на которой существенно меняется функция n. Введя вместо L «волновой вектор» неоднородности $k \sim 1/L$, запишем это условие в виде[1])

$$\hbar k \ll p_F. \tag{4,6}$$

Частота ω изменения функции распределения, устанавливающаяся при заданном k, порядка величины $\omega \sim v_F k$ и автоматически удовлетворяет условию

$$\hbar\omega \ll \varepsilon_F. \tag{4,7}$$

[1]) Согласно определению (1,1), $\hbar/p_F$ порядка величины межатомных расстояний, так что условие (4,6) — очень слабое.

Соотношение же между $\hbar\omega$ и температурой T может быть любым. Если $\hbar\omega \gg T$, то роль ширины области размытости функции распределения играет именно величина $\hbar\omega$; тогда (4,7) есть обязательное для применимости всей теории условие, обеспечивающее малость квантовой неопределенности энергии квазичастицы (связанной с их столкновениями) по сравнению с $\hbar\omega$.

Применим теперь кинетическое уравнение к исследованию колебательных движений ферми-жидкости.

При низких, но отличных от нуля температурах в ферми-жидкости происходят взаимные столкновения квазичастиц, причем время их свободного пробега $\tau \infty T^{-2}$. Характер распространяющихся в жидкости волн существенно зависит от величины произведения $\omega\tau$.

При $\omega\tau \ll 1$ (что фактически эквивалентно условию малости длины пробега квазичастицы l по сравнению с длиной волны λ) столкновения успевают установить термодинамическое равновесие в каждом (малом по сравнению с λ) элементе объема жидкости. Это значит, что мы имеем дело с обычными гидродинамическими звуковыми волнами, распространяющимися со скоростью $u = \sqrt{\partial P/\partial\rho}$. Поглощение звуковых волн при $\omega\tau \ll 1$ мало, но при увеличении $\omega\tau$ оно возрастает и при $\omega\tau \sim 1$ становится очень сильным, так что распространение звуковых волн становится невозможным[1]).

При дальнейшем увеличении $\omega\tau$, когда уже $\omega\tau \gg 1$, в ферми-жидкости снова становится возможным распространение волн, имеющих, однако, другой физический характер. В этих колебаниях столкновения квазичастиц не играют роли и термодинамическое равновесие в каждом элементе объема не успевает устанавливаться. Процесс можно рассматривать как происходящий при абсолютном нуле температуры. Эти волны называют *нулевым звуком*.

Согласно сказанному выше, при $\omega\tau \gg 1$ в кинетическом уравнении можно опустить интеграл столкновений; тогда

$$\frac{\partial \delta\hat{n}}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial \delta\hat{n}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial \delta\hat{\varepsilon}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \tag{4,8}$$

где $\mathbf{v} = \partial\varepsilon/\partial\mathbf{p}$ — скорость квазичастиц, вычисленная по невозмущенной энергии ε ($\mathbf{v} = v_F\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{p}$); индекс 0 у ε здесь и ниже опускаем.

При $T = 0$ равновесная функция распределения n_0 представляет собой ступенчатую функцию $\theta(p)$, обрывающуюся у

---

[1]) При $\omega\tau \ll 1$ коэффициент поглощения звука $\gamma \sim \omega^2\eta/\rho u^3$, где η — вязкость жидкости. По порядку величины имеем $u \sim v_F$, $\eta/\rho \sim v_F l \sim v_F^2\tau$, где v_F — скорость квазичастиц (не зависящая от температуры), так что $\eta \infty T^{-2}$ (*И. Я. Померанчук*, 1950). При этом $\gamma u/\omega \sim \omega\tau \infty \omega/T^2$.

предельного импульса $p=p_F$. Ее производная

$$\frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}}=-\mathbf{n}\delta(p-p_F)=-\mathbf{v}\delta(\varepsilon-\varepsilon_F).$$

Предполагая, что зависимость $\delta\hat{n}$ в волне от времени и координат дается множителем $\exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)]$, будем искать решение кинетического уравнения в виде

$$\delta\hat{n}=\delta(\varepsilon-\varepsilon_F)\,\hat{\nu}(\mathbf{n})\,e^{i(\mathbf{kr}-\omega t)}. \tag{4,9}$$

Тогда уравнение (4,8) с $\partial\delta\hat{\varepsilon}/\partial\mathbf{r}$ из (4,3) принимает вид

$$(\omega-v_F\mathbf{nk})\,\hat{\nu}(\mathbf{n})=\mathbf{nk}\frac{p_F^2}{(2\pi\hbar)^3}\,\mathrm{Sp}'\int\hat{f}(\mathbf{n},\mathbf{n}')\,\hat{\nu}(\mathbf{n}')\,do', \tag{4,10}$$

где $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ — единичные векторы в направлениях $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$, а интегрирование производится по направлениям $\mathbf{n}'$.

Рассмотрим колебания (нулевой звук), не затрагивающие спиновых характеристик жидкости. Это значит, что от спиновых переменных не зависит не только равновесная функция распределения, но и ее «возмущение» δn. В такой волне изменение функции распределения при колебаниях сводится к деформации граничной ферми-поверхности (сферы в невозмущенном распределении), остающейся при этом резкой границей между заполненными и незаполненными состояниями квазичастиц. Функция же $\nu(\mathbf{n})$ представляет собой величину смещения (в единицах энергии) этой поверхности в заданном направлении $\mathbf{n}$.

Поскольку $\nu(\mathbf{n}')$ не зависит от спиновых переменных, то операция Sp' в (4,10) применяется только к функции $\hat{f}$. Написав последнюю в виде (2,4), будем иметь $\mathrm{Sp}'\hat{f}=(2\pi^2\hbar^3/p_Fm^*)\,F(\vartheta)$. Таким образом, оператор $\boldsymbol{\sigma}$ выпадает вовсе из уравнения, принимающего теперь вид

$$(\omega-\mathbf{kv})\,\nu(\mathbf{n})=\mathbf{kv}\int F(\vartheta)\,\nu(\mathbf{n}')\,\frac{do'}{4\pi}. \tag{4,11}$$

Выберем направление $\mathbf{k}$ в качестве полярной оси, и пусть углы θ, φ определяют направление $\mathbf{n}$. Введя также скорость распространения волны $u_0=\omega/k$ и обозначение $s=u_0/v_F$, напишем окончательно полученное уравнение в виде

$$(s-\cos\theta)\,\nu(\theta,\varphi)=\cos\theta\int F(\vartheta)\,\nu(\theta',\varphi')\,\frac{do'}{4\pi}. \tag{4,12}$$

Это интегральное уравнение определяет, в принципе, скорость распространения волн и функцию $\nu(\mathbf{n}')$ в них. Сразу же отметим, что для незатухающих колебаний (которые здесь нас только и интересуют) величина s должна превышать 1, т. е. должно быть

$$u_0>v_F. \tag{4,13}$$

Происхождение этого неравенства можно понять, переписав (4,12) в виде

$$\tilde{\nu}(\theta, \varphi) = \cos\theta \int F(\vartheta) \frac{\tilde{\nu}(\theta', \varphi')}{s - \cos\theta'} \frac{do'}{4\pi},$$

где вместо ν введена другая неизвестная функция $\tilde{\nu} = (s - \cos\theta)\nu$. При $s = \omega/kv_F < 1$ подынтегральное выражение имеет полюс в точке $\cos\theta' = s$, и для придания интегралу смысла этот полюс должен быть обойден по определенному правилу в плоскости комплексного переменного $\cos\theta'$. Этот обход вносит в интеграл мнимую часть, в результате чего приобретает мнимую часть также и частота ω (при заданном вещественном k), что и означает затухание волны. Физический смысл равенства $\cos\theta = u_0/v_F$ (отвечающего полюсу) состоит в том, что это есть условие черенковского излучения волн нулевого звука квазичастицами[1]).

Рассмотрим в качестве примера случай, когда функция $F(\vartheta)$ сводится к постоянной (обозначим ее F_0). Интеграл в правой стороне уравнения (4,12) не зависит при этом от углов θ, φ. Поэтому искомая функция ν имеет вид

$$\nu = \mathrm{const} \cdot \frac{\cos\theta}{s - \cos\theta}. \tag{4,14}$$

Ферми-поверхность приобретает, таким образом, форму поверхности вращения, вытянутой вперед по направлению распространения волны и сплюснутой в обратном направлении. Эта анизотропия является проявлением неравновесности состояния жидкости в каждом элементе ее объема: в равновесии все свойства жидкости должны быть изотропными и тем самым ферми-поверхность—сферической. Укажем для сравнения, что обычной звуковой волне соответствует сферическая ферми-поверхность колеблющегося радиуса (граничный импульс p_F колеблется вместе с плотностью жидкости), смещенная как целая на величину, связанную со скоростью движения жидкости в волне; соответствующая функция ν имеет вид $\nu = \delta p_F + \mathrm{const} \cdot \cos\theta$.

Для определения скорости распространения волны нулевого звука u_0 подставляем (4,14) в (4,12) и находим

$$F_0 \int_0^{\pi} \frac{\cos\theta}{s - \cos\theta} \frac{2\pi \sin\theta \, d\theta}{4\pi} = 1.$$

Произведя интегрирование, получим уравнение, определяющее

---

[1]) Такой механизм затухания называют затуханием Ландау; оно будет подробно изучено в томе X в связи с колебаниями плазмы. Правило обхода полюса в интеграле устанавливается заменой ω на $\omega + i0$ (т. е. $s \to s + i0$), смысл которой состоит в том, что ею обеспечивается конечность возмущения во все предыдущие моменты времени (в том числе при $t \to -\infty$).

в неявном виде скорость u_0 по заданной величине F_0:

$$\frac{s}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}-1=\frac{1}{F_0}. \tag{4,15}$$

Функция в левой стороне уравнения убывает от ∞ до 0 при изменении s от 1 до ∞, оставаясь всегда положительной. Отсюда следует, что рассматриваемые волны могут существовать только при $F_0>0$. Подчеркнем, что возможность распространения нулевого звука зависит, таким образом, от свойств взаимодействия квазичастиц в ферми-жидкости.

При $F_0\to 0$ найдем из (4,15), что s стремится к 1 по закону

$$s-1\approx 2e^{-2/F_0}. \tag{4,16}$$

Этот случай имеет более общее значение, чем формула (4,15) (предполагающая $F=\text{const}\equiv F_0$): он соответствует нулевому звуку в почти идеальном ферми-газе при произвольном виде функции $F(\vartheta)$. Действительно, почти идеальному газу соответствует малая по абсолютной величине функция $F(\vartheta)$. Из уравнения (4,12) видно, что при этом s будет близким к 1, а функция ν — заметно отличной от нуля лишь при малых углах θ. На этом основании, рассматривая лишь область малых углов, можно заменить в интеграле в правой стороне (4,12) функцию $F(\vartheta)$ ее значением при $\vartheta=0$ (при $\theta=0$ и $\theta'=0$ также и $\vartheta=0$). В результате мы снова вернемся к формулам (4,14) и (4,16) с заменой константы F_0 на $F(0)$[1]. Отметим, что в слабо неидеальном газе скорость нулевого звука превышает скорость обычного звука в $\sqrt{3}$ раз. Действительно, для первой имеем $u_0\approx v_F$, а для второй находим из формулы (2,17) (пренебрегая в ней $\overline{F}$ и положив $m^*\approx m$), $u^2\approx p_F^2/3m^{*2}=v_F^2/3$.

В общем случае произвольной зависимости $F(\vartheta)$ решение уравнения (4,12) неоднозначно. Оно, в принципе, допускает существование различных типов нулевого звука, отличающихся друг от друга угловой зависимостью их амплитуды $\nu(\theta,\varphi)$ и распространяющихся с различными скоростями. При этом наряду с аксиально-симметричными решениями $\nu(\theta)$ могут существовать и асимметричные решения, в которых ν содержит азимутальные множители $e^{\pm im\varphi}$, где m — целые числа (см. задачу). Отметим, что для всех таких решений интеграл $\int \nu\, do=0$, т. е. объем, заключенный внутри ферми-поверхности, остается неизменным; это значит, что колебания происходят без изменения плотности жидкости.

---

[1]) Колебания, соответствующие нулевому звуку в слабо неидеальном ферми-газе, были впервые рассмотрены *Ю. Л. Климонтовичем* и *В. П. Силиным* (1952).

Возможность распространения волн в ферми-жидкости при абсолютном нуле означает, что ее энергетический спектр может содержать ветвь, отвечающую элементарным возбуждениям с импульсом $\mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}$ и энергией $\varepsilon=\hbar\omega=u_0p$ — «кванты нулевого звука». Тот факт, что нулевой звук (с любым заданным $\mathbf{k}$) может иметь произвольную (малую) интенсивность, в терминах элементарных возбуждений означает, что последние могут заполнять свои квантовые состояния в любом числе; другими словами, они подчиняются статистике Бозе и образуют, как говорят, *бозевскую ветвь* спектра ферми-жидкости. Подчеркнем, однако, что в рамках теории Ландау было бы неправильным вводить соответствующие этой ветви поправки в термодинамические величины ферми-жидкости, поскольку они содержат более высокие степени температуры (T^3 в теплоемкости), чем уже первые поправки к изложенной приближенной теории.

Вопрос о поглощении нулевого звука требует рассмотрения столкновений квазичастиц и не относится к содержанию этого тома.

Задача

Найти скорость распространения асимметричных волн нулевого звука при $F=F_0+F_1\cos\vartheta$.

Решение. При

$$F=F_0+F_1(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi'))$$

могут существовать решения с $\nu\sim e^{\pm i\varphi}$. Действительно, положив $\nu=f(\theta)e^{i\varphi}$, подставив в (4,12) и произведя интегрирование по $d\varphi'$, получим

$$(s-\cos\theta)f=\frac{F_1}{4}\cos\theta\sin\theta\int\limits_0^{\pi}\sin^2\theta' f(\theta')\,d\theta'.$$

Отсюда

$$\nu=\text{const}\cdot\frac{\sin\theta\cos\theta}{s-\cos\theta}e^{i\varphi}.$$

Подставив это выражение обратно в уравнение, получим соотношение

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin^3\theta\cos\theta}{s-\cos\theta}d\theta=\frac{4}{F_1},$$

определяющее зависимость скорости распространения от F_1. Интеграл в левой стороне равенства является монотонно убывающей функцией s. Поэтому его наибольшее значение достигается при $s=1$. Вычислив интеграл при $s=1$, найдем, что распространение асимметричной волны рассмотренного вида возможно при $F_1>6$[1]).

---

[1]) Для жидкого He^3 можно вычислить F_0 и F_1 по известным значениям m^* и u^2 с помощью формул (2,12) и (2,17): $F_0=10{,}8$, $F_1=6{,}3$ (при нулевом давлении).