

В кинетическом уравнении должен быть учтен теперь член (4,4) с коммутатором $\{\hat{\varepsilon}, \hat{n}\}$; для не зависящих от координат распределений оно принимает вид

$$\frac{\partial \delta \hat{n}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} \{\hat{\varepsilon}, \hat{n}\} = 0. \quad (5,5)$$

С точностью до линейных по $\delta \hat{n}$ членов имеем

$$\{\hat{\varepsilon}, \hat{n}\} = -\beta_1 \{\sigma \mathbf{H}, \delta \hat{n}\} + \beta_1 \delta(\varepsilon - \varepsilon_F) \{\delta \hat{\varepsilon}, \sigma \mathbf{H}\}.$$

Стоящие здесь коммутаторы определяются формулой

$$\{\sigma \mathbf{a}, \sigma \mathbf{b}\} = 2i\sigma [\mathbf{a}\mathbf{b}],$$

где \mathbf{a} , \mathbf{b} —произвольные векторы (см. III (55,10)); в результате кинетическое уравнение приводится к виду

$$i\omega \boldsymbol{\mu}(\mathbf{n}) = -\frac{2\beta_1}{\hbar} [\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}(\mathbf{n})], \quad (5,6)$$

где обозначено

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\mu}(\mathbf{n}) + \int \boldsymbol{\mu}(\mathbf{n}') G(\vartheta) \frac{d\omega'}{4\pi}. \quad (5,7)$$

В общем случае решение уравнения (5,6) может быть разложено в ряд по шаровым функциям $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ (с полярной осью вдоль \mathbf{H}). Каждый член разложения представляет определенный тип колебаний со своей частотой ω_{lm} .

Первой из них, ω_{00} , отвечают колебания с $\boldsymbol{\mu} = \text{const}$; при этом $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\mu}(1 + \bar{G})$ и уравнение (5,7) сводится к

$$i\omega_{00} \boldsymbol{\mu} = -\frac{2\beta}{\hbar} [\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}];$$

колебания поперечны к полю ($\boldsymbol{\mu} \perp \mathbf{H}$). Расписав уравнение в компонентах (в плоскости, перпендикулярной \mathbf{H}) и составив определитель этой системы, найдем частоту

$$\omega_{00} = 2\beta H / \hbar. \quad (5,8)$$

Напомним, что β —магнитный момент частицы (истинной) жидкости. Таким образом, частота ω_{00} оказывается вовсе не зависящей от специфических свойств жидкости. Значения же всех остальных частот ω_{lm} зависят от конкретного вида функции $G(\vartheta)$.

§ 6. Вырожденный почти идеальный ферми-газ с отталкиванием между частицами

Вопрос о термодинамических свойствах «почти идеального» вырожденного газа не имеет непосредственного физического смысла, так как реально существующие в природе газы при

температуре вблизи абсолютного нуля конденсируются. Тем не менее, ввиду существенного методического интереса этого вопроса, имеет смысл рассмотреть его для воображаемой модели газа, частицы которого взаимодействуют таким образом, что конденсация газа исключена.

Условие слабой неидеальности газа заключается в малости радиуса действия молекулярных сил r_0 по сравнению со средним расстоянием между частицами $l \sim (V/N)^{1/3}$. Вместе с условием $r_0 \ll l$ будет справедливо также и неравенство

$$pr_0/\hbar \ll 1 \quad (6,1)$$

для импульсов p частиц. Действительно, для вырожденного ферми-газа предельный импульс p_F оценивается по формуле (1,1), согласно которой $p_F/\hbar \sim (N/V)^{1/3} \ll 1/r_0$.

Мы будем рассматривать здесь лишь парное взаимодействие между частицами, причем для простоты будем считать это взаимодействие $U(r)$ не зависящим от спинов частиц. Наша цель состоит в вычислении первых членов разложения термодинамических величин по степеням отношения r_0/l путем применения квантовомеханической теории возмущений. Затруднение заключается в том, что, ввиду быстрого возрастания энергии взаимодействия на малых расстояниях между частицами, теория возмущений (так называемое борновское приближение) к столкновениям частиц в действительности неприменима. Это затруднение можно, однако, обойти следующим образом.

В предельном случае «медленных» (какими они являются при условии (6,1)) столкновений, амплитуда взаимного рассеяния частиц с массой m стремится к постоянному пределу — a , который в борновском приближении дается выражением (см. III (126,13))

$$-a = -\frac{m}{4\pi\hbar^2} U_0, \quad U_0 = \int U(r) d^3x, \quad (6,2)$$

причем этот предел отвечает s -состоянию пары частиц (со спином $1/2$); постоянную величину a называют *длиной рассеяния*¹⁾. Поскольку эта величина полностью определяет свойства столкновений, то она же должна определять и термодинамические свойства газа.

Отсюда вытекает возможность применения следующего приема (его называют *перенормировкой*). Формально заменяем

¹⁾ Выражение (6,2) не учитывает квантовомеханической тождественности частиц. В предельном случае медленных столкновений тождественных частиц со спинами $1/2$ рассеяние происходит только при антипараллельных спинах, причем дифференциальное сечение рассеяния в телесный угол $d\Omega$ (в системе центра инерции) есть $d\sigma = 4a^2 d\Omega$; полное сечение получается интегрированием $d\sigma$ по полусфере: $\sigma = 8\pi a^2$ (см. III § 137).

истинную энергию $U(r)$ другой функцией, с тем же самым значением a , но допускающей применение теории возмущений. До тех пор (т. е. до такого приближения) пока окончательный результат вычислений содержит U только в виде амплитуды рассеяния, этот результат будет совпадать с тем, к которому привело бы истинное взаимодействие.

Радиус действия истинного взаимодействия, вообще говоря, совпадает по порядку величины с длиной рассеяния a . Для фиктивного же поля $U(r)$, введенного в качестве вспомогательного понятия, условие применимости борновского приближения означает, что $a \ll r_0$. Истинным малым параметром разложения теорий является, конечно, величина ap_F/\hbar .

Ниже нам понадобится связь между U_0 и a не только в первом (формула (6,2)), но и во втором борновском приближении. Для ее нахождения вспомним, что если вероятность некоторого перехода системы под влиянием постоянного возмущения \hat{V} определяется в первом приближении матричным элементом V_{00} , то во втором приближении V_{00} заменяется на

$$V_{00} + \sum'_n \frac{V_{0n}V_{n0}}{E_0 - E_n},$$

где суммирование производится по состояниям ($n \neq 0$) невозмущенной системы (см. III § 43). В данном случае речь идет о системе двух сталкивающихся частиц, а возмущением является их взаимодействие $U(r)$. Матричные элементы возмущения для переходов с изменением импульсов частиц $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ (причем $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$) равны

$$\langle \mathbf{p}'_1 \alpha_1, \mathbf{p}'_2 \alpha_2 | U | \mathbf{p}_1 \alpha_1, \mathbf{p}_2 \alpha_2 \rangle = \frac{1}{V} \int U(r) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} d^3x, \quad (6,3)$$

где $\mathbf{p} = \mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2 = -(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1)$; ввиду независимости взаимодействия от спинов проекции спинов частиц (указываемые индексами α_1, α_2) при столкновении не меняются. Роль V_{00} играет матричный элемент при нулевых импульсах: U_0/V . Таким образом, для перехода от первого ко второму приближению надо заменить U_0 на

$$U_0 + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}'_1} \left[\frac{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2}{2m} \right]^{-1} \left| \int U e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} d^3x \right|^2$$

(суммирование производится при заданных $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ по $\mathbf{p}'_1 \neq \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$). Поскольку в нашем случае импульсы частиц предполагаются малыми, то во всех существенных членах в сумме можно заметить матричные элементы их значениями при $\mathbf{p} = 0$. Сделав

это, получим следующее выражение для длины рассеяния¹⁾:

$$a = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \left[U_0 + \frac{U_0^2}{V} \sum_{\mathbf{p}_1'} \frac{2m}{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2} \right]. \quad (6,4)$$

С той же точностью имеем отсюда

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \left[1 - \frac{4\pi\hbar^2 a}{mV} \sum_{\mathbf{p}_1'} \frac{2m}{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2} \right]. \quad (6,5)$$

Расходимость суммы в (6,4) (при больших \mathbf{p}_1' , \mathbf{p}_2') связана с произведенной заменой всех матричных элементов постоянными значениями и несущественна, так как при дальнейшем использовании этого выражения для вычисления энергии системы все равно получится сходящееся выражение, в котором большие импульсы не играют роли. Мы понимаем под a длину рассеяния медленных частиц, не зависящую от их энергии. Формула же (6,4) содержит, на первый взгляд, зависимость от импульсов \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 . В действительности эта зависимость заключена лишь в мнимой части амплитуды рассеяния (возникающей при надлежащем определении способа суммирования—ср. III (130,9)), на которую можно не обращать внимания, поскольку нам заранее известно, что окончательный результат будет все равно вещественным; к этому вопросу мы еще вернемся в § 21.

В этом параграфе мы рассмотрим модель ферми-газа с отталкивательным характером взаимодействия между частицами; для такого взаимодействия $a > 0$. Именно в этом случае газ имеет энергетический спектр описанного в §§ 1, 2 фермиевского типа.

Гамильтониан системы частиц (со спином 1/2) с парным взаимодействием между ними записывается в методе вторичного квантования в виде

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{p}\alpha} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}\alpha}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}\alpha} + \frac{1}{2} \sum \langle \mathbf{p}_1' \alpha_1, \mathbf{p}_2' \alpha_2 | U | \mathbf{p}_1 \alpha_1, \mathbf{p}_2 \alpha_2 \rangle \hat{a}_{\mathbf{p}_1' \alpha_1}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2' \alpha_2}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2 \alpha_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1 \alpha_1} \quad (6,6)$$

(см. III § 64). Здесь $\hat{a}_{\mathbf{p}\alpha}^+$ и $\hat{a}_{\mathbf{p}\alpha}$ — операторы рождения и уничтожения свободной частицы с импульсом \mathbf{p} и проекцией спина α ($\alpha = \pm 1/2$). Первый член в (6,6) отвечает кинетической, а второй — потенциальной энергии частиц; в последнем суммирование

¹⁾ Во всех промежуточных формулах мы пишем суммы по дискретным значениям импульсов частиц, заключенных в конечном объеме V ; при окончательном вычислении суммирование заменяется, по общему правилу, интегрированием по $V d^3p / (2\pi\hbar)^3$.

производится по всем значениям импульсов и проекций спинов с соблюдением закона сохранения импульса при столкновениях.

В соответствии с предположением о малости импульсов частиц снова заменяем матричные элементы в (6,6) их значением при нулевых импульсах: $\langle 0\alpha_1, 0\alpha_2 | U | 0\alpha_1, 0\alpha_2 \rangle = U_0/V$. Далее, замечаем, что в силу антикоммутируемости операторов $\hat{a}_{p_1\alpha_1}$, $\hat{a}_{p_2\alpha_2}$ в статистике Ферми, их произведение антисимметрично по отношению к перестановке индексов; то же самое относится к произведениям $\hat{a}_{p_1\alpha_1}^+$, $\hat{a}_{p_2\alpha_2}^+$. В результате взаимно сокращаются все члены во второй сумме в (6,6), содержащие пары одинаковых индексов α_1, α_2 (физически это связано с упомянутым уже обстоятельством, что в пределе медленных столкновений взаимно рассеиваться могут лишь частицы с противоположными спинами).

Таким образом, гамильтониан системы принимает вид

$$\hat{H} = \sum_{p\alpha} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{p\alpha}^+ a_{p\alpha} + \frac{U_0}{V} \sum_{p_1 p_2 p_1'} \hat{a}_{p_1+}^+ \hat{a}_{p_2+}^+ \hat{a}_{p_1-} - \hat{a}_{p_1+}, \quad (6,7)$$

где $\hat{a}_{i+} \equiv \hat{a}_{p_1+}$, $\hat{a}_{i-} \equiv \hat{a}_{p_1-}$ и т. п., а индексы $+$ и $-$ здесь и ниже стоят вместо $+1/2$ и $-1/2$.

Собственные значения этого гамильтониана вычисляются с помощью обычной теории возмущений, причем второй член в (6,6) рассматривается как малая поправка к первому члену. Последний уже имеет диагональный вид и его собственные значения равны

$$E^{(0)} = \sum_{p\alpha} \frac{p^2}{2m} n_{p\alpha}, \quad (6,8)$$

где $n_{p\alpha}$ — числа заполнения состояний $p\alpha$ ¹⁾.

Поправка первого порядка дается диагональными матричными элементами энергии взаимодействия:

$$E_1^{(1)} = \frac{U_0}{V} \sum_{p_1 p_2} n_{p_1+} n_{p_2-}, \quad (6,9)$$

где $n_{i+} \equiv n_{p_1+}$ и т. п.

Для нахождения поправки второго порядка пользуемся известной формулой теории возмущений

$$E_n^{(2)} = \sum_m' \frac{|V_{n,m}|^2}{E_n - E_m},$$

¹⁾ Предполагая, что частицы обладают определенными значениями проекции спина, мы тем самым предполагаем приведенной к диагональному виду также и статистическую матрицу $n_{\alpha\beta}(p)$; функции же $n_{\alpha}(p)$ с $\alpha = \pm 1/2$ являются при этом ее диагональными компонентами.

где индексы n, m нумеруют состояния невозмущенной системы. Простое вычисление (с использованием известных матричных элементов операторов $\hat{a}_{p\alpha}, \hat{a}_{p\alpha}^+$) приводит к результату

$$\frac{U_0^2}{V^2} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}'_1} \frac{n_{1+} n_{2-} (1-n'_{1+}) (1-n'_{2-})}{(\rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_1'^2 - \rho_2'^2) / 2m}. \quad (6,10)$$

Структура этого выражения вполне понятна: квадрат матричного элемента перехода $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ пропорционален числам заполнения состояний $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ и числам свободных мест в состояниях $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$.

Входящий в (6,9—10) интеграл U_0 должен быть выражен через реальную физическую величину—амплитуду рассеяния $-a$. В членах второго порядка это может быть сделано по (6,2), а в членах первого порядка требуется более точная формула (6,5). Произведя эти подстановки, получим для поправки первого порядка по a :

$$E^{(1)} = \frac{g}{V} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2} n_{1+} n_{2-} \quad (6,11)$$

и для поправки второго порядка:

$$E^{(2)} = \frac{2mg^2}{V^2} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}'_1} \frac{n_{1+} n_{2-} [(1-n'_{1+}) (1-n'_{2-}) - 1]}{\rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_1'^2 - \rho_2'^2}$$

(для краткости вводим в промежуточных формулах «константу связи» частиц газа¹⁾ $g = 4\pi\hbar^2 a/m$). Раскрывая выражение в числителе, замечаем, что члены с произведениями четырех n взаимно сокращаются, поскольку их числители симметричны, а знаменатели антисимметричны по отношению к перестановке $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$; суммирование же по этим переменным производится симметричным образом. Таким образом, окончательно имеем

$$E^{(2)} = -\frac{2mg^2}{V^2} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}'_1} \frac{n_{1+} n_{2-} (n'_{1+} + n'_{2-})}{\rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_1'^2 - \rho_2'^2}. \quad (6,12)$$

Эта сумма (в которой все $n_{p\alpha} \rightarrow 0$ при $\mathbf{p} \rightarrow \infty$) уже сходится.

С помощью полученных формул можно прежде всего вычислить энергию основного состояния. Для этого надо положить все $n_{p\alpha}$ равными единице внутри ферми-сферы ($p < p_F = \hbar (3\pi^2 N/V)^{1/3}$) и равными нулю вне ее. Заметим в этой связи, что хотя в исходном гамильтониане собственные значения

¹⁾ После перенормировки амплитуды рассеяния эта величина уже отнюдь не совпадает с постоянной U_0 , фигурирующей в (6,2)!

операторных произведений $\hat{a}_{p\alpha}^+ \hat{a}_{p\alpha}$ дают числа заполнения состояний самих частиц газа, но после диагонализации гамильтониана с помощью теории возмущений мы уже имеем дело с функцией распределения квазичастиц (обозначенной нами, как и в предыдущих параграфах, через $n_{p\alpha}$).

Замечая, что $\sum n_{p+} = \sum n_{p-} = N/2$, получим из (6,11) поправку первого порядка

$$E_0^{(1)} = gN^2/4V.$$

В формуле (6,12) заменяем суммирование по трем импульсам с учетом условия $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$ интегрированием по

$$\frac{V^3}{(2\pi\hbar)^9} \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2) d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2,$$

так что

$$E_0^{(2)} = -\frac{4mg^2V}{(2\pi\hbar)^9} \int \frac{\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2)}{p_1^2 + p_2^2 - p_1'^2 - p_2'^2} d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p'_1 d^3 p'_2,$$

причем интегрирование происходит по области $p_1, p_2, p'_1 \leq p_F$. Вычисление интеграла ¹⁾ приводит к следующему окончательному результату для энергии основного состояния:

$$E_0 = N \frac{3p_F^2}{10m} \left[1 + \frac{10}{9\pi} \frac{p_F a}{\hbar} + \frac{4(11-2 \ln 2)}{21\pi^2} \left(\frac{p_F a}{\hbar} \right)^2 \right], \quad (6,13)$$

где величина, стоящая перед скобками, — энергия идеального ферми-газа (*K. Huang, C. N. Yang, 1957*).

Химический потенциал газа при абсолютном нуле определяется как производная $\mu = (\partial E_0 / \partial N)_V$; выраженный через предельный импульс p_F , он имеет вид

$$\mu = \frac{p_F^2}{2m} \left[1 + \frac{4}{3\pi} \frac{p_F a}{\hbar} + \frac{4(11-2 \ln 2)}{15\pi^2} \left(\frac{p_F a}{\hbar} \right)^2 \right]. \quad (6,14)$$

Согласно общим положениям теории Ландау, спектр элементарных возбуждений $\epsilon(\mathbf{p})$ и функция взаимодействия квазичастиц $f_{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ определяются первой и второй вариациями полной энергии по функции распределения квазичастиц ²⁾. Если писать E в виде дискретной суммы по \mathbf{p} и α , то имеем, по определению,

$$\delta E = \sum_{p\alpha} \epsilon_{\alpha}(\mathbf{p}) \delta n_{p\alpha} + \frac{1}{2V} \sum_{p\alpha, p'\alpha'} f_{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{p\alpha} \delta n_{p'\alpha'} \quad (6,15)$$

¹⁾ Фактически проще производить вычисления в другом порядке, начав с вычисления функции f (см. ниже).

²⁾ Матрица $f_{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ в этом параграфе — совокупность диагональных по двум парам индексов (α, β и γ, δ) компонент матрицы $f_{\alpha\gamma, \beta\delta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$.

(причем после дифференцирования энергии надо заменить $n_{p\alpha}$ единицей внутри и нулем вне ферми-сферы). В вычислении таким путем эффективной массы квазичастиц m^* , однако, нет необходимости, поскольку она может быть найдена и более простым способом (см. ниже):

Для вычисления же функции $f_{\alpha\alpha'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ (на ферми-поверхности), дифференцируем дважды сумму выражений (6,11—12), после чего надо положить $\mathbf{p} = \mathbf{p}' = \mathbf{p}_F$. Произведя это простое вычисление и перейдя от суммирования к интегрированию, получим

$$f_{+-}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = g - \frac{4mg^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \left\{ \frac{\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}' - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)}{2\rho_F^2 - \rho_1^2 - \rho_2^2} + \frac{\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}' - \mathbf{p}_2) + \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{p}_2)}{2(\rho_1^2 - \rho_2^2)} \right\} d^3p_1 d^3p_2,$$

$$f_{++}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = f_{--}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \frac{2mg^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}' - \mathbf{p}_2) + \delta(\mathbf{p}' + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{p}_2)}{\rho_1^2 - \rho_2^2} d^3p_1 d^3p_2.$$

Интегрирование в этих формулах сравнительно просто ввиду меньшей кратности интегралов.

Окончательный результат должен быть представлен в виде (2,4), не зависящем от выбора оси квантования спинов.

В таком виде он дается формулой

$$f_{\alpha\gamma, \beta\delta} = \frac{2\pi a\hbar^2}{m} \left\{ \left[1 + \frac{2a\rho_F}{\pi\hbar} \left(2 + \frac{\cos\vartheta}{2\sin\frac{\vartheta}{2}} \ln \frac{1 + \sin\frac{\vartheta}{2}}{1 - \sin\frac{\vartheta}{2}} \right) \right] \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} - \left[1 + \frac{2a\rho_F}{\pi\hbar^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin\frac{\vartheta}{2} \ln \frac{1 + \sin\frac{\vartheta}{2}}{1 - \sin\frac{\vartheta}{2}} \right) \right] \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\gamma\delta} \right\}, \quad (6,16)$$

где ϑ — угол между векторами \mathbf{p}_F и \mathbf{p}'_F (А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, 1957)¹⁾.

Эффективная масса квазичастиц получается отсюда интегрированием по формуле (2,12) и равна

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{8}{15\pi^2} (7 \ln 2 - 1) \left(\frac{a\rho_F}{\hbar} \right)^2. \quad (6,17)$$

¹⁾ Функция (6,16) обращается логарифмически в бесконечность при $\vartheta = \pi$. Это обстоятельство связано со сделанными пренебрежениями. Более точное исследование показывает, что хотя значение $\vartheta = \pi$ действительно является особой точкой функции, но последняя обращается в ней не в бесконечность, а в нуль (см. примечание на стр. 263). Неприменимость формулы (3,16) вблизи $\vartheta = \pi$ несущественна для дальнейших приложений, в которых фигурируют интегралы, сходящиеся в этой точке.

Формула же (2,17) позволяет найти скорость звука в газе:

$$u^2 = \frac{p_F^2}{3m^2} \left[1 + \frac{2}{\pi} \frac{ap_F}{\hbar} + \frac{8(11-2\ln 2)}{15\pi^2} \left(\frac{ap_F}{\hbar} \right)^2 \right]. \quad (6,18)$$

Интегрируя затем величину $u^2 m/N$ (выраженную через N/V вместо p_F) по dN , мы найдем, согласно (2,13), химический потенциал газа, а еще одно интегрирование по dN приведет к выражению (6,13) для энергии основного состояния.

Формула (6,13) представляет собой первые члены разложения энергии газа по степеням «параметра газовости» $\eta = p_F a / \hbar \sim \sim a (N/V)^{1/3}$. Аналогичными, хотя и значительно более громоздкими вычислениями можно было бы получить еще и несколько следующих членов разложения. Дело в том, что в случае ферми-газа тройные столкновения вносят вклад в энергию лишь в сравнительно далеком приближении. Из трех сталкивающихся частиц по крайней мере две имеют одинаковую проекцию спина; при этом координатная волновая функция системы должна быть антисимметричной по отношению к этим двум частицам. Это значит, что орбитальный момент относительного движения этих частиц равен по крайней мере 1 (p -состояние). Соответствующая волновая функция содержит лишнюю (по сравнению с волновой функцией s -состояния) степень p/\hbar (см. III § 33), и, следовательно, вероятность такого столкновения содержит лишнее p^2 , т. е. ослабляется в $\sim (pa/\hbar)^2 \sim \eta^2$ раз по сравнению с вероятностью «лобового» столкновения частиц, неподчиняющихся принципу Паули. В результате тройные столкновения дадут вклад в энергию лишь в членах, содержащих объем как $V^{-2}V^{-2/3}$. Другими словами, через характеристики одних только парных столкновений выражаются все члены разложения энергии вплоть до членов порядка

$$N \frac{p_F^2}{m} \eta^5$$

включительно (т. е. еще три члена, следующих за выписанными в (6,13)). Однако в числе характеристик парных столкновений будет фигурировать не только амплитуда s -рассеяния для медленных столкновений (как в (6,13)), но и ее производные по энергии, а также амплитуда p -рассеяния.