перенормировочной постоянной. Мнимая часть функции Грина

$$\operatorname{Im} G \approx \frac{Z \operatorname{Im} \varepsilon}{|\omega+\mu-\varepsilon|^2}.$$

Заметив, что это выражение относится к значениям $\omega \approx \varepsilon-\mu$ и сравнив его знак с правилом (8,14), найдем, что

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im} \varepsilon < 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} \varepsilon > \mu, \\ &\operatorname{Im} \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} \varepsilon < \mu, \end{aligned} \tag{8,18}$$

как и должно быть: такой знак $\operatorname{Im} \varepsilon$ в обоих случаях ($\varepsilon_m^{(+)}$ и $\varepsilon_m^{(-)}$ в (8,9)) соответствует правильной отрицательной мнимой добавке к энергии возбужденного состояния E_m.

К аналитическим свойствам гриновской функции мы вернемся еще в § 36, где этот вопрос будет рассмотрен сразу для общего случая произвольных температур.

§ 9. Функция Грина идеального ферми-газа

Для иллюстрации рассмотренных в предыдущем параграфе общих соотношений вычислим функцию Грина идеального газа.

Шредингеровские ψ-операторы всегда можно представить в виде разложения

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_{\alpha} \hat{a}_{\mathbf{p}\alpha} \psi_{\mathbf{p}\alpha}(\mathbf{r}) \tag{9,1}$$

по полному набору функций $\psi_{\mathbf{p}\alpha}$ — волновых функций свободной частицы с импульсом $\mathbf{p}$ (и энергией $p^2/2m$), т. е. по плоским волнам

$$\psi_{\mathbf{p}\alpha} = \frac{u_\alpha}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \tag{9,2}$$

(u_α — спиновая амплитуда, нормированная условием $u_\alpha u_\alpha^* = 1$); такой выбор функций $\psi_{\mathbf{p}\alpha}$ не имеет отношения к реальному взаимодействию частиц в системе.

Но для системы невзаимодействующих частиц может быть записан в явном виде также и гейзенберговский ψ-оператор. В этом случае переход от шредингеровского к гейзенберговскому представлению сводится к введению в каждый член суммы в (9,1) соответствующего временного множителя

$$\hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{p}\alpha} \hat{a}_{\mathbf{p}\alpha} \psi_{\mathbf{p}\alpha}(\mathbf{r}) \exp\left[-i\left(\frac{p^2}{2m}-\mu\right)t\right]. \tag{9,3}$$

В этом легко убедиться, заметив, что матричные элементы гейзенберговского оператора для всякого перехода $i \to f$ должны содержать множители $\exp[-i(E_i'-E_f')t]$, где E_i', E_f' — энергии начального и конечного состояний (в данном случае это — собственные значения гамильтониана $\hat{H}'=\hat{H}-\mu\hat{N}$). Для перехода с уменьшением числа частиц в состоянии $\mathbf{p}\alpha$ на 1 разность $E_i'-E_f'=p^2/2m-\mu$, так что указанное требование выполнено.

Однако, вместо прямого вычисления функции Грина с помощью (9,3) по определению (7,10), удобнее свести сначала это определение к эквивалентному ему дифференциальному уравнению. Для этого продифференцируем функцию $G_{\alpha\beta}(X_1-X_2)$ по t_1. При этом надо учесть, что в точке $t_1=t_2$ эта функция разрывна. Действительно, согласно определению (7,10), скачок функции

$$[G_{\alpha\beta}]\equiv G_{\alpha\beta}|_{t_1=t_2+0}-G_{\alpha\beta}|_{t_1=t_2-0}=$$
$$=-i\langle\hat{\Psi}_\alpha(t_1,\mathbf{r}_1)\hat{\Psi}_\beta^+(t_1,\mathbf{r}_2)+\hat{\Psi}_\beta^+(t_1,\mathbf{r}_2)\hat{\Psi}_\alpha(t_1,\mathbf{r}_1)\rangle$$

или в силу (7,3) [1])

$$[G_{\alpha\beta}]=-i\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2). \tag{9,4}$$

Наличие скачка приводит при дифференцировании к появлению члена $[G_{\alpha\beta}]\,\delta(t_1-t_2)$. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t_1}G_{\alpha\beta}=-i\left\langle \mathrm{T}\,\frac{\partial\hat{\Psi}_\alpha(X_1)}{\partial t_1}\hat{\Psi}_\beta^+(X_2)\right\rangle-i\delta_{\alpha\beta}\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\delta(t_1-t_2). \tag{9,5}$$

Для системы свободных частиц гейзенберговский ψ-оператор удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial\hat{\Psi}_\alpha}{\partial t}=-\frac{1}{2m}\Delta\hat{\Psi}_\alpha-\mu\hat{\Psi}_\alpha$$

(ср.7,8)). Подставив эту производную в (9,5) и снова воспользовавшись определением (7,10), получим уравнение для функции Грина

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\Delta}{2m}+\mu\right)G^{(0)}(t,\mathbf{r})=\delta(t)\;\delta(\mathbf{r}), \tag{9,6}$$

где уже положено $G_{\alpha\beta}^{(0)}=\delta_{\alpha\beta}G^{(0)}$, а индекс (0) у G указывает отсутствие взаимодействия между частицами.

Преобразуем это уравнение по Фурье:

$$\left(\omega-\frac{\mathbf{p}^2}{2m}+\mu\right)G^0(\omega,\mathbf{p})=1.$$

Определяя отсюда гриновскую функцию, надо добавить к ω бесконечно малую мнимую часть таким образом, чтобы мнимая

[1]) Подчеркнем, что величина этого скачка вообще не зависит от взаимодействия частиц!

часть G имела правильный знак (в соответствии с (8,14)):

$$G^{(0)}(\omega, \mathbf{p}) = \left[\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu + i0 \cdot \operatorname{sign}\omega\right]^{-1}. \tag{9,7}$$

Полюс этого выражения лежит при $\omega + \mu = \varepsilon(\mathbf{p}) = p^2/2m$ в соответствии с тем, что в идеальном газе квазичастицы совпадают с реальными частицами. Химический потенциал идеального ферми-газа $\mu = p_F^2/2m$. Для слабо возбужденных состояний p близко к p_F, так что можно заменить $p^2/2m \approx \mu + v_F(p - p_F)$ (где $v_F = p_F/m$) и для таких состояний переписать функцию Грина в виде

$$G^{(0)}(\omega, \mathbf{p}) = [\omega - v_F(p - p_F) + i0 \cdot \operatorname{sign}\omega]^{-1}. \tag{9,8}$$

При всяких интегрированиях с участием функции $G^{(0)}$ наличие бесконечно малой мнимой части в ее знаменателе существенно только вблизи полюса, когда $\omega \approx v_F(p - p_F)$. В этом смысле $\operatorname{sign}\omega$ в (9,7) можно заменить на $\operatorname{sign}(p - p_F)$ и написать $G^{(0)}$ в виде

$$G^{(0)}(\omega, \mathbf{p}) = [\omega - p^2/2m + \mu + i0 \cdot \operatorname{sign}(p - p_F)]^{-1}. \tag{9,9}$$

Такая замена существенна в том отношении, что в виде (9,9) $G^{(0)}$ оказывается единой аналитической во всей плоскости функцией комплексной переменной ω и для вычисления интегралов можно пользоваться методами теории аналитических функций.

Так, для вычисления интеграла (7,23) (распределение частиц по импульсам) при отличном от нуля отрицательном t замыкаем путь интегрирования (вещественная ось ω) бесконечно удаленной полуокружностью в верхней полуплоскости (после этого можно положить $t = 0$). Интеграл

$$N(\mathbf{p}) = -\frac{i}{2\pi}\int \frac{d\omega}{\omega - p^2/2m + \mu + i0 \cdot \operatorname{sign}(p - p_F)}$$

определяется теперь вычетом подынтегрального выражения в полюсе, находящемся в верхней полуплоскости. При $p > p_F$ такой полюс отсутствует, так что $N(\mathbf{p}) = 0$. Если же $p < p_F$, то находим $N(\mathbf{p}) = 1$ — как и должно было быть для основного состояния идеального ферми-газа.

§ 10. Распределение частиц ферми-жидкости по импульсам

Гриновская функция ферми-жидкости не может быть, конечно, вычислена в общем виде, как это было сделано для ферми-газа. Но утверждение о том, что ферми-жидкость обладает спектром описанного в § 1 типа означает, что ее функция Грина имеет полюс при

$$\omega = \varepsilon(\mathbf{p}) - \mu \approx v_F(p - p_F), \quad v_F = p_F/m^*. \tag{10,1}$$