часть G имела правильный знак (в соответствии с (8,14)):

$$G^{(0)}(\omega, \mathbf{p}) = \left[\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu + i0 \cdot \operatorname{sign} \omega\right]^{-1}. \tag{9,7}$$

Полюс этого выражения лежит при $\omega + \mu = \varepsilon(\mathbf{p}) = p^2/2m$ в соответствии с тем, что в идеальном газе квазичастицы совпадают с реальными частицами. Химический потенциал идеального ферми-газа $\mu = p_F^2/2m$. Для слабо возбужденных состояний p близко к p_F, так что можно заменить $p^2/2m \approx \mu + v_F(p - p_F)$ (где $v_F = p_F/m$) и для таких состояний переписать функцию Грина в виде

$$G^{(0)}(\omega, \mathbf{p}) = [\omega - v_F(p - p_F) + i0 \cdot \operatorname{sign} \omega]^{-1}. \tag{9,8}$$

При всяких интегрированиях с участием функции $G^{(0)}$ наличие бесконечно малой мнимой части в ее знаменателе существенно только вблизи полюса, когда $\omega \approx v_F(p - p_F)$. В этом смысле $\operatorname{sign} \omega$ в (9,7) можно заменить на $\operatorname{sign}(p - p_F)$ и написать $G^{(0)}$ в виде

$$G^{(0)}(\omega, \mathbf{p}) = [\omega - p^2/2m + \mu + i0 \cdot \operatorname{sign}(p - p_F)]^{-1}. \tag{9,9}$$

Такая замена существенна в том отношении, что в виде (9,9) $G^{(0)}$ оказывается единой аналитической во всей плоскости функцией комплексной переменной ω и для вычисления интегралов можно пользоваться методами теории аналитических функций.

Так, для вычисления интеграла (7,23) (распределение частиц по импульсам) при отличном от нуля отрицательном t замыкаем путь интегрирования (вещественная ось ω) бесконечно удаленной полуокружностью в верхней полуплоскости (после этого можно положить $t = 0$). Интеграл

$$N(\mathbf{p}) = -\frac{i}{2\pi} \int \frac{d\omega}{\omega - p^2/2m + \mu + i0 \cdot \operatorname{sign}(p - p_F)}$$

определяется теперь вычетом подынтегрального выражения в полюсе, находящемся в верхней полуплоскости. При $p > p_F$ такой полюс отсутствует, так что $N(\mathbf{p}) = 0$. Если же $p < p_F$, то находим $N(\mathbf{p}) = 1$ — как и должно было быть для основного состояния идеального ферми-газа.

§ 10. Распределение частиц ферми-жидкости по импульсам

Гриновская функция ферми-жидкости не может быть, конечно, вычислена в общем виде, как это было сделано для ферми-газа. Но утверждение о том, что ферми-жидкость обладает спектром описанного в § 1 типа означает, что ее функция Грина имеет полюс при

$$\omega = \varepsilon(\mathbf{p}) - \mu \approx v_F(p - p_F), \quad v_F = p_F/m^*. \tag{10,1}$$

Другими словами, она может быть представлена в виде

$$G(\omega, \mathbf{p}) = \frac{Z}{\omega - v_F(p-p_F) + i0 \cdot \operatorname{sign} \omega} + g(\omega, \mathbf{p}), \tag{10,2}$$

где $g(\omega, \mathbf{p})$—функция, конечная в точке (10,1). Как уже было отмечено в связи с (8,17), коэффициент Z (вычет функции G в полюсе) положителен.

Из выражения (10,2) можно сделать интересное заключение о характере распределения частиц жидкости (не квазичастиц!) по импульсам. Именно вычислим разность значений функции распределения $N(\mathbf{p})$ (фактически зависящей лишь от абсолютной величины p) по обе стороны поверхности ферми-сферы, т. е. предел разности

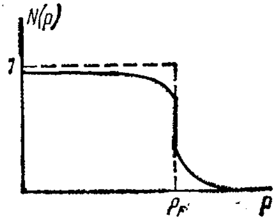

Рис. 1.

$$N(p_F - q) - N(p_F + q)$$

при $q = +0$.

Распределение $N(\mathbf{p})$ выражается через функцию Грина интегралом (7,23). Ввиду конечности функции $g(\omega, \mathbf{p})$ заранее очевидно, что разность интегралов от нее будет стремиться при $q \to 0$ к нулю. Поэтому достаточно рассмотреть лишь разность интегралов от полюсных членов в (10,2). Поскольку при интегрировании член $i0$ в знаменателе существен только вблизи полюса, можно (как уже было указано в § 9) писать $\operatorname{sign}(p-p_F)$ вместо $\operatorname{sign}\omega$. Тогда имеем

$$N(p_F - q) - N(p_F + q) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{Z}{\omega + v_F q - i0} - \frac{Z}{\omega - v_F q + i0} \right\} \frac{d\omega}{2\pi}$$

(ввиду сходимости этого интеграла от разности, множитель $e^{-i\omega t}$ с $t = -0$ в нем можно опустить). Замыкая теперь путь интегрирования бесконечно удаленной полуокружностью (все равно в которой из полуплоскостей), найдем, что весь интеграл равен Z и не зависит от q. Таким образом, имеем

$$N(p_F - 0) - N(p_F + 0) = Z \tag{10,3}$$

(*А. Б. Мигдал*, 1957).

Выше было указано, что $Z > 0$. Поскольку $N(\mathbf{p}) \leqslant 1$, то из (10,3) следует, что

$$0 < Z \leqslant 1 \tag{10,4}$$

(причем значение $Z = 1$ достигается лишь в предельном случае идеального газа).

Таким образом, распределение частиц по импульсам в ферми-жидкости при $T=0$ имеет, как и в газе, скачок на поверхности ферми-сферы, уменьшаясь в направлении изнутри сферы наружу. В отличие от случая газа, величина скачка, однако, меньше единицы, и функция $N(\mathbf{p})$ остается отличной от нуля также и при $p > p_F$, как это показано на рис. 1 сплошной кривой (пунктирная линия отвечает газу).

§ 11. Вычисление термодинамических величин по функции Грина

Знание гриновской функции системы достаточно для описания ее термодинамических свойств. При $T=0$ эти свойства выражаются зависимостью энергии системы (совпадающей с энергией основного состояния E_0) от плотности N/V.

После того как определен (решением уравнения (8,16)) закон дисперсии квазичастиц $\varepsilon(p)$, эту зависимость можно найти, воспользовавшись тем, что

$$\varepsilon(p_F)=\mu. \tag{11,1}$$

Поскольку зависимость p_F от N/V известна, согласно (1,1),

$$p_F=(3\pi^2)^{1/3}(N/V)^{1/3}, \tag{11,2}$$

равенство (11,1) определяет функцию $\mu(N/V)$ (хотя и в неявном виде, так как и закон дисперсии $\varepsilon(p)$ содержит, вообще говоря, μ как параметр). При $T=0$ (а потому и $S=0$) химический потенциал $\mu=(\partial E_0/\partial N)_V$; интегрируя это равенство, найдем искомую энергию

$$E_0=\int_0^N \mu\left(\frac{N}{V}\right)dN \tag{11,3}$$

(при $N=0$, разумеется, и $E_0=0$).

Другой способ описания термодинамических свойств при $T=0$ состоит в вычислении термодинамического потенциала Ω. Согласно общему определению (см. V § 24), этот потенциал $\Omega=E-TS-\mu N=-PV$ и его дифференциал $d\Omega=-S\,dT-N\,d\mu$; при $T=0$ имеем также и $S=0$, и эти выражения сводятся к

$$\Omega=E-\mu N, \tag{11,4}$$

$$d\Omega=-N\,d\mu. \tag{11,5}$$

Напомним также, что по смыслу потенциала Ω он описывает свойства системы при $V=\mathrm{const}$.

Простейший способ выразить Ω через функцию Грина состоит в использовании связи (7,24) N/V с G. Подставив N из (7,24) в (11,5)