

Таким образом, распределение частиц по импульсам в ферми-жидкости при $T=0$ имеет, как и в газе, скачок на поверхности ферми-сферы, уменьшаясь в направлении изнутри сферы наружу. В отличие от случая газа, величина скачка, однако, меньше единицы, и функция $N(\mathbf{p})$ остается отличной от нуля также и при $p > p_F$, как это показано на рис. 1 сплошной кривой (пунктирная линия отвечает газу).

§ 11. Вычисление термодинамических величин по функции Грина

Знание гриновской функции системы достаточно для описания ее термодинамических свойств. При $T=0$ эти свойства выражаются зависимостью энергии системы (совпадающей с энергией основного состояния E_0) от плотности N/V .

После того как определен (решением уравнения (8,16)) закон дисперсии квазичастиц $\varepsilon(p)$, эту зависимость можно найти, воспользовавшись тем, что

$$\varepsilon(p_F) = \mu. \quad (11,1)$$

Поскольку зависимость p_F от N/V известна, согласно (1,1),

$$p_F = (3\pi^2)^{1/3} (N/V)^{1/3}, \quad (11,2)$$

равенство (11,1) определяет функцию $\mu(N/V)$ (хотя и в неявном виде, так как и закон дисперсии $\varepsilon(p)$ содержит, вообще говоря, μ как параметр). При $T=0$ (а потому и $S=0$) химический потенциал $\mu = (\partial E_0 / \partial N)_V$; интегрируя это равенство, найдем искомую энергию

$$E_0 = \int_0^N \mu \left(\frac{N}{V} \right) dN \quad (11,3)$$

(при $N=0$, разумеется, и $E_0=0$).

Другой способ описания термодинамических свойств при $T=0$ состоит в вычислении термодинамического потенциала Ω . Согласно общему определению (см. V § 24), этот потенциал $\Omega = E - TS - \mu N = -PV$ и его дифференциал $d\Omega = -S dT - N d\mu$; при $T=0$ имеем также и $S=0$, и эти выражения сводятся к

$$\Omega = E - \mu N, \quad (11,4)$$

$$d\Omega = -N d\mu. \quad (11,5)$$

Напомним также, что по смыслу потенциала Ω он описывает свойства системы при $V = \text{const}$.

Простейший способ выразить Ω через функцию Грина состоит в использовании связи (7,24) N/V с G . Подставив N из (7,24) в (11,5)

и интегрируя по $d\mu$ (при $V = \text{const}$), получим

$$\Omega(\mu) = 2iV \int_0^\mu d\mu \cdot \lim_{t \rightarrow -0} \int G(\omega, \mathbf{p}) e^{-i\omega t} \frac{d^3 p d\omega}{(2\pi)^4}, \quad (11,6)$$

поскольку, опять-таки, $\Omega = 0$ при $\mu = 0$.

§ 12. Ψ -операторы в представлении взаимодействия

Гриновскую функцию системы взаимодействующих частиц нельзя, разумеется, вычислить в общем виде. Существует, однако математическая техника (подобная диаграммной технике квантовой теории поля), позволяющая вычислять ее в виде ряда по степеням энергии взаимодействия частиц. При этом каждый член ряда выражается через функции Грина системы свободных частиц и оператор взаимодействия.

Введем, наряду с гейзенберговским, еще и другое представление операторов—представление, в котором их зависимость от времени определяется не истинным гамильтонианом системы

$$\hat{H}' = \hat{H}'^{(0)} + \hat{V} = \hat{H}^{(0)} - \mu \hat{N} + \hat{V}$$

(\hat{V} —оператор взаимодействия), а гамильтонианом свободных частиц $\hat{H}'^{(0)}$:

$$\hat{\Psi}_0(t, \mathbf{r}) = \exp(i\hat{H}'^{(0)} t) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \exp(-i\hat{H}'^{(0)} t). \quad (12,1)$$

Операторы и волновые функции в этом представлении (так называемое *представление взаимодействия*) будем отличать индексом 0. Выразив функцию Грина через операторы $\hat{\Psi}_0$ (вместо гейзенберговских $\hat{\Psi}$), мы тем самым сделаем первый шаг к достижению поставленной цели—выражению G через $G^{(0)}$ и \hat{V} .

Обозначим в этом параграфе буквой Φ (или ϕ) волновые функции в «пространстве чисел заполнения» (в отличие от координатных волновых функций Ψ или ψ); на эти функции действуют вторично-квантованные операторы. Пусть ϕ —такая функция в шредингеровском представлении; ее зависимость от времени определяется волновым уравнением

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} = (\hat{H}'^{(0)} + \hat{V}) \phi. \quad (12,2)$$

В гейзенберговском представлении, где вся временная зависимость перенесена на операторы, волновая функция системы Φ вообще не зависит от времени: $\Phi = \text{const}$. В представлении же взаимодействия волновая функция Φ_0 зависит от времени, но эта зависимость связана только со взаимодействием частиц