и интегрируя по $d\mu$ (при $V=\mathrm{const}$), получим

$$\Omega(\mu)=2iV\int_0^\mu d\mu\cdot\lim_{t\to-0}\int G(\omega,\ \mathbf{p})\,e^{-i\omega t}\frac{d^3p\,d\omega}{(2\pi)^4}, \tag{11,6}$$

поскольку, опять-таки, $\Omega=0$ при $\mu=0$.

§ 12. Ψ-операторы в представлении взаимодействия

Гриновскую функцию системы взаимодействующих частиц нельзя, разумеется, вычислить в общем виде. Существует, однако математическая техника (подобная диаграммной технике квантовой теории поля), позволяющая вычислять ее в виде ряда по степеням энергии взаимодействия частиц. При этом каждый член ряда выражается через функции Грина системы свободных частиц и оператор взаимодействия.

Введем, наряду с гейзенберговским, еще и другое представление операторов — представление, в котором их зависимость от времени определяется не истинным гамильтонианом системы

$$\hat{H}'=\hat{H}'^{(0)}+\hat{V}=\hat{H}^{(0)}-\mu\hat{N}+\hat{V}$$

($\hat{V}$ — оператор взаимодействия), а гамильтонианом свободных частиц $\hat{H}'^{(0)}$:

$$\hat{\Psi}_0(t,\ \mathbf{r})=\exp(i\hat{H}'^{(0)}t)\,\hat{\psi}(\mathbf{r})\exp(-i\hat{H}'^{(0)}t). \tag{12,1}$$

Операторы и волновые функции в этом представлении (так называемое *представление взаимодействия*) будем отличать индексом 0. Выразив функцию Грина через операторы $\hat{\Psi}_0$ (вместо гейзенберговских $\hat{\Psi}$), мы тем самым сделаем первый шаг к достижению поставленной цели — выражению G через $G^{(0)}$ и $\hat{V}$.

Обозначим в этом параграфе буквой Φ (или φ) волновые функции в «пространстве чисел заполнения» (в отличие от координатных волновых функций Ψ или ψ); на эти функции действуют вторично-квантованные операторы. Пусть φ — такая функция в шредингеровском представлении; ее зависимость от времени определяется волновым уравнением

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial t}=(\hat{H}'^{(0)}+\hat{V})\,\varphi. \tag{12,2}$$

В гейзенберговском представлении, где вся временная зависимость перенесена на операторы, волновая функция системы Φ вообще не зависит от времени: $\Phi=\mathrm{const}$. В представлении же взаимодействия волновая функция Φ_0 зависит от времени, но эта зависимость связана только со взаимодействием частиц в системе и определяется уравнением

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Phi_0(t)=\hat{V}_0(t)\,\Phi_0(t), \tag{12,3}$$

где

$$\hat{V}_0=\exp(i\hat{H}'^{(0)}t)\,\hat{V}\exp(-i\hat{H}'^{(0)}t) \tag{12,4}$$

— оператор взаимодействия в том же представлении (в операторах вида (7,6—7) переход к этому представлению сводится просто к замене $\hat{\Psi}$ на $\hat{\Psi}_0$). Уравнение (12,3) легко получить, заметив, что преобразованию операторов, согласно (12,1), отвечает преобразование волновых функций согласно

$$\Phi_0=\exp(i\hat{H}'^{(0)}t)\,\varphi \tag{12,5}$$

(см. III § 12). Дифференцируя это выражение с учетом (12,2), получим (12,3)[1]).

В силу (12,3) значения $\Phi_0(t)$ в два бесконечно близких момента времени связаны друг с другом равенством

$$\Phi_0(t+\delta t)=[1-i\delta t\cdot\hat{V}_0(t)]\,\Phi_0(t)=\exp\{-i\delta t\cdot\hat{V}_0(t)\}\,\Phi_0(t).$$

Соответственно значение Φ_0 в произвольный момент t может быть выражено через значение в некоторый начальный момент t_0 $(t_0<t)$ как

$$\Phi_0(t)=\hat{S}(t,\ t_0)\,\Phi_0(t_0), \tag{12,6}$$

где

$$\hat{S}(t,\ t_0)=\prod_{t_i=t_0}^{t}\exp\{-i\delta t\cdot\hat{V}_0(t_i)\}, \tag{12,7}$$

причем сомножители в этом произведении расположены, очевидно, справа налево в порядке возрастания времен t_i; подразумевается предел произведения по всем бесконечно малым интервалам δt между t_0 и t. Если бы $V_0(t)$ было обычной функцией, то этот предел сводился бы просто к

$$\exp\left\{-i\int_{t_0}^{t}V_0(t)\,dt\right\}.$$

Но такое сведение основано на коммутативности множителей, взятых в различные моменты времени, подразумевающейся при переходе от произведения в (12,7) к суммированию в показателе. Для оператора $\hat{V}_0(t)$ такой коммутативности нет и сведение

---

[1]) Уравнение (12,3) совпадает с уравнением IV (73,5), и следующий ниже процесс его решения повторяет изложение в IV § 73.

к обычному интегралу невозможно. Вместо этого можно записать (12,7) в символическом виде

$$\hat{S}(t, t_0) = \mathrm{T}\exp\left\{-i\int_{t_0}^{t}\hat{V}_0(t)\,dt\right\}, \tag{12,8}$$

где T — символ хронологического расположения множителей в той же последовательности, что в (12,7), т. е. справа налево от меньших времен к большим.

Оператор $\hat{S}$ унитарен ($\hat{S}^{-1} = \hat{S}^{+}$) и обладает очевидными свойствами:

$$\begin{gathered}\hat{S}(t_3, t_2)\hat{S}(t_2, t_1) = \hat{S}(t_3, t_1),\\ \hat{S}^{-1}(t_2, t_1)\hat{S}^{-1}(t_3, t_2) = \hat{S}^{-1}(t_3, t_1).\end{gathered} \tag{12,9}$$

Для упрощения дальнейших рассуждений сделаем формальное предположение (не отражающееся на окончательных результатах), что взаимодействие $\hat{V}_0(t)$ адиабатически «включается» от $t=-\infty$ к конечным временам и адиабатически «выключается» при $t=+\infty$. Тогда при $t\to-\infty$, до включения взаимодействия, волновая функция $\Phi_0(t)$ совпадает с гейзенберговской функцией Φ. Положив в (12,6) $t_0=-\infty$, получим

$$\Phi_0(t) = \hat{S}(t, -\infty)\Phi. \tag{12,10}$$

Установив, таким образом, связь между волновыми функциями в обоих представлениях, мы устанавливаем тем самым и закон преобразования операторов, в том числе ψ-операторов:

$$\hat{\Psi} = \hat{S}^{-1}(t, -\infty)\hat{\Psi}_0\hat{S}(t, -\infty). \tag{12,11}$$

В силу унитарности $\hat{S}$ по такому же закону преобразуются и операторы $\hat{\Psi}^{+}$.

Выразим теперь функцию Грина через ψ-операторы в представлении взаимодействия[1]). Пусть $t_1 > t_2$; тогда

$$\begin{aligned}G_{\alpha\beta}(X_1, X_2) &= -i\langle\hat{\Psi}_\alpha(t_1)\hat{\Psi}^{+}_\beta(t_2)\rangle = \\ &= -i\langle\hat{S}^{-1}(t_1, -\infty)\hat{\Psi}_{0\alpha}(t_1)\hat{S}(t_1, -\infty)\hat{S}^{-1}(t_2, -\infty)\times \\ &\qquad\times\hat{\Psi}^{+}_{0\beta}(t_2)\hat{S}(t_2, -\infty)\rangle.\end{aligned}$$

Согласно (12,9) имеем

$$\hat{S}(t_1, -\infty)\hat{S}^{-1}(t_2, -\infty) = \hat{S}(t_1, t_2)\hat{S}(t_2, -\infty)\hat{S}^{-1}(t_2, -\infty) = \hat{S}(t_1, t_2),$$

$$\begin{aligned}\hat{S}^{-1}(t_1, -\infty) &= \hat{S}^{-1}(t_1, -\infty)\hat{S}^{-1}(\infty, t_1)\hat{S}(\infty, t_1) = \\ &= \hat{S}^{-1}(\infty, -\infty)\hat{S}(\infty, t_1).\end{aligned}$$

[1]) Этот вывод повторяет рассуждения в IV § 100.

Подставляя в предыдущее выражение, получим

$$G_{\alpha\beta}(X_1, X_2) =$$
$$= -i \langle \hat{S}^{-1}(\infty, -\infty) \hat{S}(\infty, t_1) \hat{\Psi}_{0\alpha}(t_1) \hat{S}(t_1, t_2) \hat{\Psi}^{+}_{0\beta}(t_2) \hat{S}(t_2, -\infty) \rangle.$$

Понимая операторы $\hat{S}$ как произведения (12,7), мы видим, что все множители в усредняемом выражении, начиная со второго, расположены в хронологическом порядке справа налево от $t = -\infty$ до $t = \infty$. Поэтому можно написать

$$G_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = -i \langle \hat{S}^{-1} \mathrm{T} [\hat{\Psi}_{0\alpha}(t_1) \hat{\Psi}^{+}_{0\beta}(t_2) \hat{S}] \rangle, \qquad (12,12)$$

где обозначено

$$\hat{S} = \hat{S}(\infty, -\infty) = \mathrm{T} \exp \left\{ -i \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{V}_0(t)\, dt \right\}. \qquad (12,13)$$

Вычисления при $t_1 < t_2$ отличаются от произведенных лишь обозначениями, и окончательный результат (12,12—13) справедлив при любых t_1, t_2.

Произведенное преобразование не зависит от того, по какому состоянию системы подразумевается усреднение. Но если усреднение производится по основному состоянию (как в (12,12)), то преобразование может быть продвинуто еще и дальше. Для этого заметим, что адиабатическое включение или выключение взаимодействия, как всякое адиабатическое возмущение, не может вызвать перехода с изменением энергии квантовой системы (см. III § 41). Поэтому система, находившаяся в невырожденном состоянии (каковым и является основное состояние), в этом состоянии и остается. Другими словами, действие оператора $\hat{S}$ на волновую функцию $\Phi = \Phi_0(-\infty)$ должно сводиться к умножению на (несущественный для состояния) фазовый множитель — среднее значение $\hat{S}$ в основном состоянии: $\hat{S}\Phi = \langle \hat{S} \rangle \Phi$. Точно так же $\Phi^* \hat{S}^{-1} = \langle S \rangle^{-1} \Phi^*$. Таким образом, окончательно получаем следующую формулу для функции Грина, выраженной через операторы в представлении взаимодействия[1]):

$$iG_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = \frac{1}{\langle \hat{S} \rangle} \langle \mathrm{T} [\hat{\Psi}_{0\alpha}(X_1) \hat{\Psi}^{+}_{0\beta}(X_2) \hat{S}] \rangle. \qquad (12,14)$$

По смыслу этого представления усреднение в (12,14) производится по основному состоянию системы свободных частиц.

---

[1]) Отметим некоторую условность обозначений в (12,14): хотя символ T в нем фигурирует дважды (в явном виде и в определении S), но в действительности все множители в произведении должны расставляться в единой хронологической последовательности.

Действительно, свойства операторов $\hat{\Psi}_0$ совпадают со свойствами гейзенберговских операторов $\hat{\Psi}$ в отсутствие взаимодействий, а гейзенберговская волновая функция Φ от времени не зависит, так что совпадает со своим значением при $t=-\infty$, когда взаимодействие отсутствует. Поэтому, в частности,

$$\langle \mathrm{T}\hat{\Psi}_{0\alpha}(X_1)\hat{\Psi}^+_{0\beta}(X_2)\rangle = iG^{(0)}_{\alpha\beta}(X_1, X_2) \qquad (12,15)$$

есть функция Грина системы невзаимодействующих частиц.

§ 13. Диаграммная техника для ферми-систем

Смысл символических выражений типа (12,14) состоит в том, что они дают возможность легко написать последовательные члены разложений по степеням $\hat{V}$. Так,

$$\langle \mathrm{T}\hat{\Psi}_{0\alpha}(X)\hat{\Psi}^+_{0\beta}(X')\hat{S}\rangle = \\ = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\ldots\int_{-\infty}^{\infty}dt_n\langle \mathrm{T}\hat{\Psi}_{0\alpha}(X)\hat{\Psi}^+_{0\beta}(X')\hat{V}_0(t_1)\ldots\hat{V}_0(t_n)\rangle, \qquad (13,1)$$

а выражение для $\langle\hat{S}\rangle$ отличается от написанного лишь отсутствием множителей $\hat{\Psi}_{0\alpha}\hat{\Psi}^+_{0\beta}$ под знаком Т-произведения. Как уже было указано, оператор $\hat{V}_0(t)$ в представлении взаимодействия получается из (7.7) заменой всех $\hat{\Psi}$ на $\hat{\Psi}_0$. Вычисление последовательных членов разложения (13,1) сводится, следовательно, к вычислению средних по основному состоянию от Т-произведения различного числа ψ-операторов свободных частиц.

Эти вычисления в значительной степени автоматизируются с помощью правил *диаграммной техники*, которые, однако, существенно зависят от характера исследуемой физической системы. Излагаемая в этом параграфе техника относится к несверхтекучим ферми-системам, причем взаимодействие частиц предполагается парным и не зависящим от спинов. Соответствующий оператор взаимодействия:

$$\hat{V}_0(t) = \\ = \frac{1}{2}\int\hat{\Psi}^+_{0\gamma}(t, \mathbf{r}_1)\hat{\Psi}^+_{0\delta}(t, \mathbf{r}_2)U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\hat{\Psi}_{0\delta}(t, \mathbf{r}_2)\hat{\Psi}_{0\gamma}(t, \mathbf{r}_1)d^3x_1d^3x_2, \qquad (13,2)$$

где $U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)$ — энергия взаимодействия двух частиц (индексы (2) у $\hat{V}$ и U опускаем).