свертке

$$\Psi_{01}\Psi_{02}\Psi_{03}^{+}\Psi_{04}^{+}$$

и выражаются суммой вида

$$\frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}\langle\hat{a}_{\mathbf{p}_1}\hat{a}_{\mathbf{p}_1}^{+}\rangle\langle\hat{a}_{\mathbf{p}_2}\hat{a}_{\mathbf{p}_2}^{+}\rangle\exp(\ldots).$$

В пределе $V\longrightarrow\infty$ суммирование по $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ заменяются интегрированием по $V^2d^3p_1d^3p_2/(2\pi)^6$, объем V сокращается и это выражение остается конечным. В сумме (13,15) отличны от нуля также и члены с $\mathbf{p}_1=\mathbf{p}_2=\mathbf{p}_3=\mathbf{p}_4$; эти члены образуют сумму вида

$$\frac{1}{V^2}\sum_{\mathbf{p}}\langle\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}\rangle\exp(\ldots);$$

но после перехода в ней к интегрированию один множитель $1/V$ остается, и в пределе $V\longrightarrow\infty$ выражение обращается в нуль.

Ясно, что этот результат имеет общий характер: в пределе $V\longrightarrow\infty$ в среднем значении от произведения ψ-операторов не обращаются в нуль лишь результаты попарных сверток.

Отметим, что в изложенном доказательстве по существу не использовалось, что усреднение производится именно по основному состоянию, и поэтому оно остается справедливым и при усреднении по любому квантовому состоянию системы[1]).

§ 14. Собственно-энергетическая функция

Сформулированные в предыдущем параграфе правила диаграммной техники обладают важным свойством: общий коэффициент в диаграмме не зависит от ее порядка. В силу этого свойства каждая «фигура» на диаграмме имеет определенный аналитический смысл независимо от того, в какую диаграмму она входит, так что ее можно вычислять независимо, заранее.

---

[1]) Но если усреднение производится по основному состоянию, то теорема Вика справедлива не только в макроскопическом пределе. Соответствующее доказательство теоремы в статистике совпадает с ее доказательством в квантовой электродинамике (IV § 78). Единственное отличие между этими случаями — разные основные состояния: в вакууме частицы отсутствуют, а в идеальном газе заполняют ферми-сферу с радиусом p_F. Для операторов $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}$, $\hat{a}_{\mathbf{p}}$ рождения и уничтожения частиц с $p>p_F$ это отличие вообще несущественно и доказательство переносится буквально. Для операторов же с $p<p_F$ надо предварительно переобозначить $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}=\hat{b}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}_{\mathbf{p}}=\hat{b}_{\mathbf{p}}^{+}$, т. е. перейти от частиц к дыркам, которые в основном состоянии внутри ферми-сферы отсутствуют.

Мало того, можно заранее вычислить сумму некоторых фигур, имеющих определенное число концов, и затем вставить этот «блок» в более сложные диаграммы. Это—одно из важнейших преимуществ диаграммой техники.

Одним из таких «блоков», имеющих также и существенное самостоятельное значение, является так называемая *собственно-энергетическая функция*[1]). Чтобы прийти к этому понятию, рассмотрим все диаграммы для функции Грина, которые нельзя разделить на две части, соединенные лишь одной сплошной линией. К таковым относятся, например, обе диаграммы первого порядка теории возмущений (13,13) и диаграммы (13,14а—е) второго порядка. Все эти диаграммы построены однотипно: по одному множителю $iG^{(0)}_{\alpha\beta}$ по концам и некоторая внутренняя часть (функция от P), которую и называют собственно-энергетической функцией. Сумму всех возможных таких частей называют точной или полной собственно-энергетической функцией или *массовым оператором*; обозначим ее через $-i\Sigma_{\alpha\beta}(P)$.

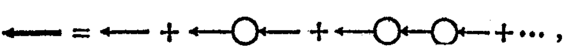
Все диаграммы собственно-энергетического типа дают в гриновскую функцию вклад, равный

$$iG^{(0)}_{\alpha\beta}(P)\left[-i\Sigma_{\beta\gamma}(P)\right]iG^{(0)}_{\gamma\delta}(P)=iG^{(0)}(P)\,\Sigma(P)\,G^{(0)}(P)\,\delta_{\alpha\delta}, \qquad (14,1)$$

где помимо $G^{(0)}_{\alpha\beta}=G^{(0)}\delta_{\alpha\beta}$ написано также и

$$\Sigma_{\alpha\beta}(P)=\delta_{\alpha\beta}\,\Sigma(P). \qquad (14,2)$$

Полная же функция Грина (изображаемая графически жирной сплошной линией) дается суммой бесконечного ряда


(14,3)

где кружки изображают точные собственно-энергетические функции ($-i\Sigma_{\alpha\beta}$). Каждый член этого ряда (начиная с третьего) представляет собой совокупность диаграмм, которые могут быть рассечены на две, три и т. д. части, соединенные между собой одной сплошной линией.

Если от всех членов ряда (14,3), начиная со второго, «отсечь» один кружок с присоединенной к нему справа линией, то оставшийся ряд будет снова совпадать с полным рядом. Это значит, что


(14,4)

[1]) Ср. аналогичное определение в квантовой электродинамике, где такая функция называлась компактной собственно-энергетической (IV §§ 100, 102).

В аналитическом виде это равенство записывается как

$$G = G^{(0)} + G\Sigma G^{(0)} \tag{14,5}$$

или, разделив на $G^{(0)}G$:

$$\frac{1}{G(P)} = \frac{1}{G^{(0)}(P)} - \Sigma(P). \tag{14,6}$$

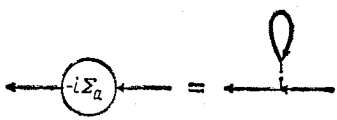
Отметим, что знак мнимой части Σ совпадает со знаком $\operatorname{Im} G$ и, согласно (8,14),

$$\operatorname{sign} \operatorname{Im} \Sigma(\omega, \mathbf{p}) = -\operatorname{sign} \omega. \tag{14,7}$$

Это следует из (14,6) с учетом того, что знак $\operatorname{Im} G^{-1}$ противоположен знаку $\operatorname{Im} G$, а согласно (9,7), $\operatorname{Im} G^{(0)-1} = 0$.

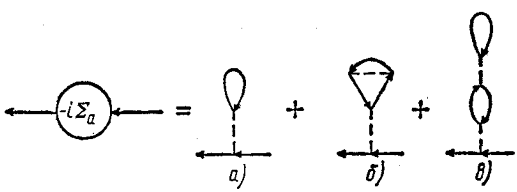
Таким образом, вычисление G сводится к вычислению Σ, требующему рассмотрения меньшего числа диаграмм. Это число еще более уменьшается в связи с тем, что часть оставшихся диаграмм сразу суммируется к очень простому выражению.

Именно выделим из всей совокупности диаграмм, определяющих Σ (при парном взаимодействии между частицами), те, которые представляют собой различные «отростки», присоединенные к концевым линиям одним пунктиром: их сумму обозначим через Σ_a. Все такие диаграммы содержатся в одной *скелетной диаграмме* вида[1])



(14,8)

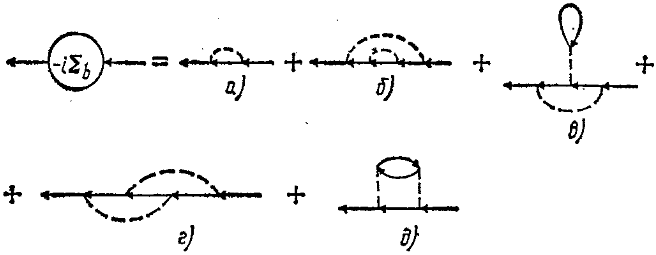
Остальную же часть Σ обозначим Σ_b. Так, среди диаграмм первого и второго порядков к первой категории относятся следующие:



(14,9)

[1]) Как и в квантовой теории поля, скелетными называют диаграммы, составленные из жирных линий и блоков; каждая такая диаграмма эквивалентна определенной совокупности бесконечного числа обычных диаграмм различных порядков.

а ко второй:



(14,10)

Жирной петле на диаграмме (14,8) отвечает точная плотность системы $n(\mu)$ (подобно тому, как тонкой петле на диаграмме (13,13а) отвечает плотность идеального газа $n^{(0)}(\mu)$). Поэтому из определения (14,8) следует, что

$$-i\Sigma_a = -in(\mu)\,U(0). \tag{14,11}$$

Таким образом,

$$\Sigma = n(\mu)\,U(0) + \Sigma_b, \tag{14,12}$$

так что особого вычисления требуют лишь диаграммы, входящие в Σ_b.

Закон дисперсии квазичастиц определяется уравнением (8,16). Выразив в нем G через Σ, согласно (14,6), и взяв $G^{(0)}$ из (9,7), получим это уравнение в виде

$$\frac{1}{G^{(0)}(\varepsilon-\mu,\ \mathbf{p})} = \varepsilon(\mathbf{p}) - \frac{p^2}{2m} = \Sigma(\varepsilon-\mu,\ \mathbf{p}). \tag{14,13}$$

На границе ферми-сферы при $p = p_F$ энергия квазичастицы совпадает с μ. Отсюда видно, что

$$\mu - \Sigma(0,\ \mathbf{p}_F) = \frac{p_F^2}{2m}. \tag{14,14}$$

В результате уравнение закона дисперсии принимает (при значениях p вблизи p_F) вид

$$\varepsilon(\mathbf{p}) - \mu = \frac{p_F}{m}(p - p_F) + \Sigma(\varepsilon-\mu,\ \mathbf{p}_F) - \Sigma(0,\ \mathbf{p}_F). \tag{14,15}$$

Подчеркнем, что p_F здесь — точное значение граничного импульса для системы взаимодействующих частиц. Оно связано соотношением $p_F^3/3\pi^2 = n$ с точной плотностью $n(\mu)$, а не с приближенной $n^{(0)}$, как в (13,5).