

§ 15. Двухчастичная функция Грина

К другим важным понятиям диаграммной техники мы придем, рассмотрев усредненное по основному состоянию T -произведение четырех гейзенберговских ψ -операторов¹⁾:

$$K_{34, 12} = \langle T \hat{\Psi}_3 \hat{\Psi}_4 \hat{\Psi}_1^+ \hat{\Psi}_2^+ \rangle. \quad (15,1)$$

Эту функцию называют *двухчастичной функцией Грина* (в отличие от функции Грина (7,9), называемой в этой связи одночастичной).

Для применения теории возмущений и построения диаграммной техники надо снова перейти к ψ -операторам в представлении взаимодействия. Как и в случае функции G , это приведет к появлению множителя \hat{S} под знаком T -произведения:

$$K_{34, 12} = \frac{1}{\langle \hat{S} \rangle} \langle T \hat{\Psi}_{03} \hat{\Psi}_{04} \hat{\Psi}_{01}^+ \hat{\Psi}_{02}^+ \hat{S} \rangle. \quad (15,2)$$

В нулевом приближении (т. е. при $\hat{S} = 1$) это выражение распадается на сумму произведений двух сверток, выражающихся через $G^{(0)}$ -функции:

$$K_{34, 12}^{(0)} = G_{31}^{(0)} G_{42}^{(0)} - G_{32}^{(0)} G_{41}^{(0)}. \quad (15,3)$$

Дальнейшее обсуждение свойств определенной таким образом двухчастичной функции Грина будем проводить в импульсном представлении.

Для однородной системы функция $K_{34, 12}$ зависит фактически лишь от трех независимых разностей аргументов, например, от $X_3 - X_2$, $X_4 - X_2$, $X_1 - X_2$. В импульсном представлении это свойство выражается тем, что компоненте разложения Фурье по всем переменным X_1, \dots, X_4 содержит δ -функцию:

$$\int K_{34, 12} \exp \{i(P_3 X_3 + P_4 X_4 - P_1 X_1 - P_2 X_2)\} d^4 X_1 \dots d^4 X_4 = \\ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_3 + P_4 - P_1 - P_2) K_{\gamma\delta, \alpha\beta}(P_3, P_4; P_1, P_2). \quad (15,4)$$

В этом легко убедиться, заметив, что

$$P_3 X_3 + P_4 X_4 - P_1 X_1 - P_2 X_2 = \\ = P_3 (X_3 - X_2) + P_4 (X_4 - X_2) - P_1 (X_1 - X_2) - X_2 (P_1 + P_2 - P_3 - P_4),$$

и перейдя к интегрированию по $X_3 - X_4$, $X_4 - X_2$, $X_1 - X_2$, X_2 . Отметим, кстати, что формулу обратного фурье-преобразования

¹⁾ Мы снова применяем упрощенные обозначения, где индексы 1, 2, ... обозначают совокупности 4-координат и спинового индекса: $X_{1\alpha}$, $X_{2\beta}$, ... (ср. примечание на стр. 66). В полной записи

$$K_{34, 12} = K_{\gamma\delta, \alpha\beta}(X_3, X_4; X_1, X_2).$$

можно записать как

$$K_{34, 12} = \int K_{\gamma\delta, \alpha\beta}(P_3, P_4; P_1, P_3 + P_4 - P_1) \times \\ \times \exp \left\{ -i \left[P_3(X_3 - X_2) + P_4(X_4 - X_2) - P_1(X_1 - X_2) \right] \right\} \frac{d^4 P_1 d^4 P_3 d^4 P_4}{(2\pi)^{12}}. \quad (15,5)$$

Определенную таким образом функцию $K_{\gamma\delta, \alpha\beta}(P_3, P_4; P_1, P_2)$ мы и будем называть двухчастичной функцией Грина в импульсном представлении; ее аргументы связаны равенством

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4.$$

В нулевом приближении имеем для нее (в соответствии с (15,3))

$$K_{\gamma\delta, \alpha\beta}^{(0)}(P_3, P_4; P_1, P_2) = \\ = (2\pi)^4 [\delta^{(4)}(P_1 - P_3) G_{\gamma\alpha}^{(0)}(P_1) G_{\delta\beta}^{(0)}(P_2) - \delta^{(4)}(P_1 - P_4) G_{\gamma\beta}^{(0)}(P_2) G_{\delta\alpha}^{(0)}(P_1)], \quad (15,6)$$

т. е. K сводится к сумме двух произведений одночастичных гриновских функций.

В следующих приближениях теории возмущений появляются члены, сводящиеся к введению поправок к этим одночастичным функциям. Наряду с ними, однако, возникают также и члены, не укладывающиеся в произведения G -функций. Именно эта часть двухчастичной функции Грина представляет самостоятельный интерес. Для ее выделения представим K в виде

$$K_{\alpha_3\alpha_4, \alpha_1\alpha_2}(P_3, P_4; P_1, P_2) = (2\pi)^4 [\delta^{(4)}(P_1 - P_3) G_{\alpha_3\alpha_1}(P_1) G_{\alpha_4\alpha_2}(P_2) - \\ - \delta^{(4)}(P_1 - P_4) G_{\alpha_3\alpha_2}(P_2) G_{\alpha_4\alpha_1}(P_1)] + \\ + G_{\alpha_3\beta_3}(P_3) G_{\alpha_4\beta_4}(P_4) i\Gamma_{\beta_3\beta_4, \beta_1\beta_2}(P_3, P_4; P_1, P_2) G_{\beta_1\alpha_1}(P_1) G_{\beta_2\alpha_2}(P_2). \quad (15,7)$$

Определенную таким образом функцию Γ называют *вершинной функцией*.

Согласно определению (15,1), двухчастичная функция Грина в пространственно-временном представлении антисимметрична по отношению к перестановкам аргументов (вместе со спиновыми индексами) первой и второй пары: 1 и 2 или 3 и 4. Отсюда следует аналогичное свойство симметрии для функции Грина и вершинной функции в импульсном представлении:

$$\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}(P_3, P_4; P_1, P_2) = -\Gamma_{\delta\gamma, \alpha\beta}(P_4, P_3; P_1, P_2) = \\ = -\Gamma_{\gamma\delta, \beta\alpha}(P_3, P_4; P_2, P_1). \quad (15,8)$$

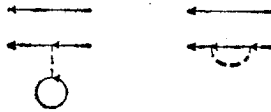
Смысл выделения четырех G -множителей в определении Γ (последний член в (15,7)) становится ясным, если проследить

за характером диаграмм, возникающих при раскрытии выражения (15,2) для двухчастичной функции Грина. Следующие ниже рассуждения снова предполагают парное взаимодействие между частицами.

В нулевом приближении функции K сопоставляются диаграммы

$$\begin{array}{cc} \overleftarrow{P_3 = P_1} & \overleftarrow{P_4 = P_1} \\ \overleftarrow{P_4 = P_2} & \overleftarrow{P_3 = P_2} \end{array}$$

отвечающие двум членам в (15,6). В первом порядке теории возмущений появляются диаграммы типов¹⁾



представляющие собой поправки к каждому из отдельных множителей в (15,6). Кроме них, однако, появляются также диаграммы, не разбивающиеся на две отдельные части:

$$\begin{array}{c} P_3 \\ \swarrow \\ \textcircled{i\Gamma^{(j)}} \\ \searrow \\ P_4 \end{array} \begin{array}{c} P_1 \\ \swarrow \\ P_2 \\ \searrow \end{array} = \begin{array}{c} P_3 \leftarrow P_1 \\ \vdots \\ P_4 \leftarrow P_2 \end{array} + \begin{array}{c} P_4 \leftarrow P_1 \\ \vdots \\ P_3 \leftarrow P_2 \end{array} \quad (15,9)$$

Четыре стрелки P_1, \dots, P_4 отвечают четырем G -множителям в последнем члене в (15,7), а «внутренняя» часть диаграмм определяет (в первом порядке) вершинную функцию—кружок в левой стороне диаграммного равенства (15,9). Раскрыв эти диаграммы в аналитическом виде, получим

$$\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}^{(j)}(P_3, P_4; P_1, P_2) = -\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}U(P_1 - P_3) + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}U(P_1 - P_4).$$

Диаграммы более высоких порядков содержат поправки трех категорий: 1) дальнейшие поправки к двум не соединенным между собой сплошным линиям, 2) поправки собственно-энергетического типа к конечным линиям на диаграммах (15,9), 3) поправки, образующие фигуру, заменяющую собой пунктирную линию на диаграммах (15,9); сумма всех возможных таких

¹⁾ Как и в случае одночастичной функции Грина, множитель $\langle \hat{S} \rangle^{-1}$ в определении (15,2) приводит к исчезновению диаграмм, содержащих отсоединенные замкнутые петли сплошных линий.

фигур и дает точную вершинную функцию $i\Gamma$. В графическом представлении двухчастичной функции Грина суммой скелетных диаграмм

$$\begin{array}{c} \overleftarrow{P_3 = P_1} \\ \overleftarrow{P_4 = P_2} \end{array} + \begin{array}{c} \overleftarrow{P_4 = P_1} \\ \overleftarrow{P_3 = P_2} \end{array} + \begin{array}{c} P_3 \quad P_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ (i\Gamma) \\ \diagup \quad \diagdown \\ P_4 \quad P_2 \end{array} \quad (15,10)$$

жирные линии изображают точные G-функции, а кружок условно обозначает вершинную функцию.

Вычисление вершинной функции в различных порядках теории возмущений должно производиться по сформулированным в § 13 правилам диаграммной техники, причем должны рассматриваться диаграммы с четырьмя внешними концами (а не с двумя, как при вычислении G). Правило 3), определяющее общий знак диаграммы, должно быть дополнено следующим указанием: если непрерывными последовательностями сплошных линий связаны концы 1 с 4 и 2 с 3 (вместо 1 с 3 и 2 с 4), то знак диаграммы меняется на обратный.

Изобразим, для примера, все диаграммы, определяющие вершинную функцию во втором порядке теории возмущений:

$$\begin{array}{c} P_3 \quad P_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ (i\Gamma^{(2)}) \\ \diagup \quad \diagdown \\ P_4 \quad P_2 \end{array} = \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ - \\ \diagup \quad \diagdown \\ 4 \quad 2 \\ \text{a)} \end{array} + \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ - \\ \diagup \quad \diagdown \\ 4 \quad 2 \\ \text{б)} \end{array} + \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ - \\ \diagup \quad \diagdown \\ 4 \quad 2 \\ \text{в)} \end{array} + \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ - \\ \diagup \quad \diagdown \\ 4 \quad 2 \\ \text{г)} \end{array} + \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ - \\ \diagup \quad \diagdown \\ 4 \quad 2 \\ \text{д)} \end{array} + \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ - \\ \diagup \quad \diagdown \\ 4 \quad 2 \\ \text{е)} \end{array} + \begin{array}{c} 3 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ - \\ \diagup \quad \diagdown \\ 4 \quad 2 \\ \text{ж)} \end{array} + (3 \leftrightarrow 4) \quad (15,11)$$

Собственно-энергетическая и вершинная функции (Σ и Γ) не независимы; они связаны друг с другом определенным интегральным уравнением (так называемым *уравнением Дайсона*)¹⁾.

¹⁾ Оно аналогично уравнению Дайсона в квантовой электродинамике (см. IV § 104).

Для его вывода воспользуемся уравнением (9,5), справедливым (как было отмечено там же) и при учете взаимодействия частиц. Разница по сравнению с выводом в § 9 состоит, однако, в том, что теперь ψ -оператор удовлетворяет уравнению (7,8). Опустив в последнем член с внешним полем и подставив из него производную $\partial\hat{\Psi}/\partial t_1$ в (9,5), получим

$$\begin{aligned} & \left(i \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{\Delta_1}{2m} + \mu \right) G_{\alpha\beta}(X_1 - X_2) - \delta_{\alpha\beta} \delta^{(4)}(X_1 - X_2) = \\ & = -i \int \left(T \hat{\Psi}_\gamma^+(X_3) U(X_1 - X_3) \hat{\Psi}_\gamma(X_3) d^4 X_3 \cdot \hat{\Psi}_\alpha(X_1) \hat{\Psi}_\beta^+(X_2) \right) = \\ & = -i \int K_{\gamma\alpha, \gamma\beta}(X_3, X_1; X_3, X_2) U_{13} d^4 X_3. \quad (15,12) \end{aligned}$$

Это равенство решает, в принципе, поставленный вопрос, так как K выражается через Γ согласно (15,7). Остается лишь перейти к импульсному представлению. Для этого умножим равенство (15,12) на $\exp[iP(X_1 - X_2)]$ и проинтегрируем по $d^4(X_1 - X_2)$; представив $K_{31,32}$ в виде (15,5), а U_{13} в виде (13,9). Тогда интегрирование по 4-координатам дает δ -функции, которые устраняются интегрированием по 4-импульсам. В результате получим

$$\begin{aligned} & [G^{(0)-1}(P)G(P) - 1] \delta_{\alpha\beta} = \\ & = -i \int K_{\gamma\alpha, \gamma\beta}(P_3, P_4; P_3 + P_4 - P, P) U(P - P_4) \frac{d^4 P_3 d^4 P_4}{(2\pi)^8} \quad (15,13) \end{aligned}$$

с $G^{(0)}(P)$ из (9,7).

Теперь осталось выразить K через Γ . Подставив (15,7) в (15,13), получим окончательно уравнение Дайсона в виде

$$\begin{aligned} & \delta_{\alpha\beta} [G^{(0)-1}(P) - G^{-1}(P)] = \delta_{\alpha\beta} \Sigma(P) = \\ & = U(0) n(\mu) \delta_{\alpha\beta} + i \delta_{\alpha\beta} \int U(P - P_1) G(P_1) \frac{d^4 P_1}{(2\pi)^4} + \\ & + \int \Gamma_{\gamma\alpha, \gamma\beta}(P_3, P_4; P_3 + P_4 - P, P) G(P_3) G(P_4) G(P_3 + P_4 - P) \times \\ & \quad \times U(P - P_4) \frac{d^4 P_3 d^4 P_4}{(2\pi)^8}. \quad (15,14) \end{aligned}$$

Здесь $n(\mu)$ — точная плотность системы как функция ее химического потенциала; этот множитель возникает от интегрирования G -функции по формуле (7,24) (при этом учитывается, что данная G -функция возникла от свертки, в которой $\hat{\Psi}^+$ стоит слева от $\hat{\Psi}$). Отметим, что первый член в правой стороне уравнения (15,14) есть Σ_a (14.11).