

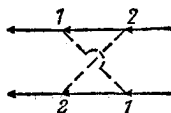
§ 16. Связь вершинной функции с амплитудой рассеяния квазичастиц

Математический аппарат, развитый в предыдущих параграфах, дает возможность строго обосновать и более глубоко понять смысл основных соотношений теории ферми-жидкости Ландау, которые были введены в главе I до некоторой степени интуитивным образом. Этому посвящены §§ 16—20¹⁾.

Существует тесная связь между вершинной функцией и амплитудой взаимного рассеяния квазичастиц. Для лучшего уяснения этой связи рассмотрим ее сначала в рамках чисто квантовомеханической задачи о рассеянии двух частиц в вакууме.

В квантовой механике «четыреххвостки» — диаграммы с четырьмя внешними концами (двумя входящими и двумя выходящими) — отвечают процессу столкновения двух частиц; при этом в аналитическом выражении диаграммы ее внешним концам сопоставляются амплитуды волновых функций (плоских волн) свободных частиц (ср. IV § 103). Проследим, каким образом такие диаграммы различных порядков действительно дают последовательные члены обычного нерелятивистского борновского разложения амплитуды рассеяния.

Прежде всего в случае вакуума большое число диаграмм вообще обращается в нуль. Это проще всего понять в координатном представлении, заметив, что в вакууме равны нулю все свертки вида $\langle \hat{\Psi} + \hat{\Psi} \rangle$, в которых оператор уничтожения стоит справа и действует на вакуумное состояние первым, остаются только свертки вида $\langle \hat{\Psi} \hat{\Psi}^+ \rangle$. Поэтому обращаются в нуль все диаграммы с замкнутыми петлями сплошных линий — они всегда содержат свертку вида $\langle \hat{\Psi} + \hat{\Psi} \rangle$. По той же причине равны нулю все поправки к гриновской функции, т. е. к внутренним сплошным линиям диаграмм²⁾. Наконец, равны нулю диаграммы с перекрещивающимися пунктирными линиями; так, в диаграмме



¹⁾ Содержание §§ 16—18 принадлежит Л. Д. Ландау (1958), а содержание §§ 19, 20 — Л. Д. Ландау и Л. П. Питаевскому (1959).

²⁾ Исчезновение всех поправок к гриновской функции в вакууме выражает собой просто тот факт, что одной частице не с чем взаимодействовать. Напомним в этой связи, что существование вакуумных поправок к функции Грина частицы в релятивистской теории связано с возможностью появления в промежуточных состояниях виртуальных электронных пар и фотонов.

(здесь цифры 1 и 2 означают аргументы t_1 и t_2) при $t_2 > t_1$ верхней внутренней линии отвечает свертка $\langle \hat{\Psi}_2^+ \hat{\Psi}_1 \rangle = 0$, а если $t_2 < t_1$, то свертка $\langle \hat{\Psi}_1^+ \hat{\Psi}_2 \rangle = 0$ отвечает нижней линии.

Таким образом, для двух частиц в вакууме остаются только следующие диаграммы, образующие, как говорят, «лестничный ряд»:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram with } i\Gamma \text{ and lines } P_3, P_4, P_1, P_2 \\
 & = \text{Tree-level diagram} + \text{One-loop diagram} + \text{Two-loop diagram} + \dots + (3 \leftrightarrow 4)
 \end{aligned}
 \tag{16,1}$$

Внутренним сплошным линиям в них отвечают вакуумные функции Грина

$$G^{(\text{вак})}(\omega, \mathbf{p}) = \left[\omega - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i0 \right]^{-1}
 \tag{16,2}$$

(формула (9,7) с $\mu = 0$). Обратим внимание на то, что (ввиду отсутствия слагаемого μ в знаменателе) полюс этой функции всегда находится в определенной (нижней) полуплоскости комплексного ω . Обращение в нуль перечисленных выше диаграмм возникает, с математической точки зрения, именно вследствие расположения всех полюсов подынтегральных выражений в одной полуплоскости; обращение интегралов в нуль становится очевидным при замыкании пути интегрирования в другой полуплоскости.

Лестничный ряд (16,1) можно просуммировать, сведя его к интегральному уравнению (ср. ниже суммирование аналогичного ряда (17,3)). Если сначала опустить диаграммы с переставленными концами 3 и 4, это уравнение окажется эквивалентным уравнению Шредингера для двух частиц без учета их тождественности, записанному в импульсном представлении (уравнение III (130,9)). Соответственно, вершинная функция Γ выразится через амплитуду рассеяния f двух частиц формулой

$$\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}(P_3, P_4; P_1, P_2) = \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \frac{4\pi}{m} f.
 \tag{16,3}$$

Прибавление же диаграмм с переставленными концами 3 и 4 приводит к антисимметризации амплитуды, как это и должно быть для фермионов. В первом приближении теории возмущений остаются лишь первая диаграмма (16,1) и диаграмма с переставленными концами, в которые $G^{(\text{вак})}$ вообще не входит. Для амплитуды рассеяния тогда получится обычная формула

первого борновского приближения. Последующие диаграммы, после проведения интегрирования по промежуточным частотам, дают известные выражения для поправок к амплитуде в следующих борновских приближениях.

В ферми-жидкости взаимодействие сталкивающихся частиц с частицами среды приводит к их эффективной замене квазичастицами. Все связанные с этим взаимодействием поправки к внутренним линиям диаграммы автоматически учитываются определением функции Γ . Дополнительного учета требуют, однако, поправки к внешним линиям. В квантовой теории поля показывается, что уже в силу общих требований унитарности матрицы рассеяния эти поправки приводят к появлению в амплитуде рассеяния по множителю \sqrt{Z} на каждый свободный конец, где Z — перенормировочная постоянная функция Грина (см. IV § 107); для диаграмм с четырьмя концами это означает умножение на Z^2 . Хотя изложенный там вывод справедлив и для квазичастиц в ферми-жидкости, поясним здесь происхождение этого множителя также и с помощью более простых (хотя и не строгих) рассуждений.

Дело в том, что гриновская функция жидкости вблизи своего полюса (первый член в (10,2)) отличается от гриновской функции идеального газа только множителем Z . Если ввести вместо $\hat{\Psi}$ и $\hat{\Psi}^+$ операторы $\hat{\Psi}_{\text{кв}} = \hat{\Psi}/\sqrt{Z}$, $\hat{\Psi}_{\text{кв}}^+ = \hat{\Psi}^+/\sqrt{Z}$, то составленная из них гриновская функция $G_{\text{кв}} = G/Z$ будет выглядеть вблизи полюса в точности как для идеального газа. В этом смысле эти операторы можно рассматривать как ψ -операторы идеального газа квазичастиц. Определенная по ним двухчастичная функция Грина будет $K_{\text{кв}} = K/Z^2$, и, следовательно (согласно определению (15,7)), вершинная часть $\Gamma_{\text{кв}} = \Gamma Z^2$, что и требовалось.

В применении к квазичастицам представляет интерес не столько сечение рассеяния, сколько число столкновений (в 1 сек в 1 см³ жидкости). Для столкновений с заданным изменением импульсов и проекций спинов частиц ($\mathbf{p}_1\alpha, \mathbf{p}_2\beta \rightarrow \mathbf{p}_3\gamma, \mathbf{p}_4\delta$) такое число дается формулой

$$dW = 2\pi |Z^2 \Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}(P_3, P_4; P_1, P_2)|^2 \delta(\epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_1 - \epsilon_2) \times \\ \times n_{\mathbf{p}_1} n_{\mathbf{p}_2} (1 - n_{\mathbf{p}_3}) (1 - n_{\mathbf{p}_4}) \frac{d^3 p_1 d^3 p_2 d^3 p_3}{(2\pi)^9}, \quad (16,4)$$

причем $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4$, а $n_{\mathbf{p}}$ — функция распределения квазичастиц. Множители $n_{\mathbf{p}_1}$ и $n_{\mathbf{p}_2}$ выражают собой просто тот факт, что число столкновений квазичастиц с заданными начальными импульсами и (проекциями спинов) пропорционально числам

таких квазичастиц в единице объема. Множители же $(1-n_{p_s})$ и $(1-n_{p_s})$ связаны с тем, что, согласно принципу Паули, столкновение может произойти, только если конечные состояния свободны.

§ 17. Вершинная функция при малых передачах импульса

Важную роль в теории ферми-жидкости играет вершинная функция при близких значениях пар переменных P_1, P_3 и P_2, P_4 (мы увидим, в частности, что она тесно связана с функцией взаимодействия квазичастиц). Имея в виду связь

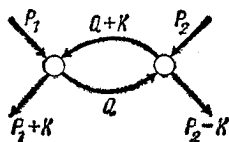
$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4,$$

положим $P_3 = P_1 + K$, $P_4 = P_2 - K$ и введем упрощенное обозначение

$$\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}(P_1 + K, P_2 - K; P_1, P_2) = \Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}(K; P_1, P_2); \quad (17,1)$$

мы будем рассматривать эту функцию при малых значениях K . В терминах процессов рассеяния квазичастиц это значит, что рассматриваются столкновения с малой передачей 4-импульса, близкие к «рассеянию вперед».

При $K=0$ функция Γ имеет, как мы увидим, особенность; нас будет интересовать именно та часть функции, в которой заключена эта особенность. Происхождение последней легко понять из рассмотрения скелетной диаграммы



закрывающей в себе ту совокупность диаграмм двухчастичной функции Грина, которые могут быть рассечены между парами концов P_1, P_3 и P_2, P_4 на две части, соединенные между собой двумя сплошными линиями¹⁾. Двум соединительным жирным линиям отвечают точные одночастичные гриновские функции $G(Q)$ и $G(Q+K)$, причем по 4-импульсу K в диаграмме производится интегрирование. При $K \rightarrow 0$ аргументы этих двух функций сближаются, а потому сближаются и их полюсы. Сближающиеся полюсы могут «зажать» между собой путь интегрирования (см. ниже), что и является источником возникновения особенности в функции Γ .

¹⁾ Так, во втором порядке теории возмущений (по парному взаимодействию) в (17,2) входят диаграммы (15,11а,б,в) и диаграмма (15,11д) с переставленными концами 3 и 4.