

таких квазичастиц в единице объема. Множители же  $(1-n_{p_s})$  и  $(1-n_{p_s})$  связаны с тем, что, согласно принципу Паули, столкновение может произойти, только если конечные состояния свободны.

### § 17. Вершинная функция при малых передачах импульса

Важную роль в теории ферми-жидкости играет вершинная функция при близких значениях пар переменных  $P_1, P_3$  и  $P_2, P_4$  (мы увидим, в частности, что она тесно связана с функцией взаимодействия квазичастиц). Имея в виду связь

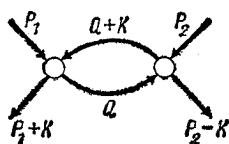
$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4,$$

положим  $P_3 = P_1 + K$ ,  $P_4 = P_2 - K$  и введем упрощенное обозначение

$$\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}(P_1 + K, P_2 - K; P_1, P_2) = \Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}(K; P_1, P_2); \quad (17,1)$$

мы будем рассматривать эту функцию при малых значениях  $K$ . В терминах процессов рассеяния квазичастиц это значит, что рассматриваются столкновения с малой передачей 4-импульса, близкие к «рассеянию вперед».

При  $K=0$  функция  $\Gamma$  имеет, как мы увидим, особенность; нас будет интересовать именно та часть функции, в которой заключена эта особенность. Происхождение последней легко понять из рассмотрения скелетной диаграммы



закрывающей в себе ту совокупность диаграмм двухчастичной функции Грина, которые могут быть рассечены между парами концов  $P_1, P_3$  и  $P_2, P_4$  на две части, соединенные между собой двумя сплошными линиями<sup>1)</sup>. Двум соединительным жирным линиям отвечают точные одночастичные гриновские функции  $G(Q)$  и  $G(Q+K)$ , причем по 4-импульсу  $K$  в диаграмме производится интегрирование. При  $K \rightarrow 0$  аргументы этих двух функций сближаются, а потому сближаются и их полюсы. Сближающиеся полюсы могут «зажать» между собой путь интегрирования (см. ниже), что и является источником возникновения особенности в функции  $\Gamma$ .

<sup>1)</sup> Так, во втором порядке теории возмущений (по парному взаимодействию) в (17,2) входят диаграммы (15,11а,б,в) и диаграмма (15,11д) с переставленными концами 3 и 4.

Для вычисления точной функции  $\Gamma$  надо просуммировать весь ряд теории возмущений. Поскольку наша цель состоит в выделении части, имеющей особенность при  $K=0$ , надо прежде всего отделить вклад от всех диаграмм, которые не могут быть рассеяны по парам сплошных линий с близкими (отличающимися на  $K$ ) значениями 4-импульса. Эту часть функции  $\Gamma$ , не имеющую особенности при  $K=0$ , обозначим посредством  $\bar{\Gamma}$ ; в ней можно положить  $K=0$ , так что  $\bar{\Gamma}$  будет функцией лишь переменных  $P_1, P_2$ :  $\bar{\Gamma}_{\gamma\delta, \alpha\beta}(P_1, P_2)$ . Что же касается «опасных» диаграмм, то их можно классифицировать по числу содержащихся в них пар линий с близкими аргументами. Таким образом, полная вершинная часть  $\Gamma$  изобразится следующим бесконечным «лестничным» рядом диаграмм:

$$\begin{array}{c} P_1 \\ \swarrow \\ \circ \\ \searrow \\ P_2 \\ \swarrow \\ P_1+K \\ \searrow \\ P_2-K \end{array} = \begin{array}{c} \text{штрихованный кружок} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{штрихованный кружок} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{штрихованный кружок} \end{array} + \begin{array}{c} \text{штрихованный кружок} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{штрихованный кружок} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{штрихованный кружок} \end{array} + \begin{array}{c} \text{штрихованный кружок} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{штрихованный кружок} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{штрихованный кружок} \end{array} + \dots \quad (17,3)$$

Здесь светлому кружку отвечает искомое  $i\Gamma$ , а заштрихованные кружки изображают  $i\bar{\Gamma}$ . Внешние линии на этих диаграммах не входят в определение  $\Gamma$  и служат лишь для указания числа и значений входящих и выходящих 4-импульсов.

Все внутренние линии на диаграммах (17,3)—жирные, т. е. им соответствуют точные  $G$ -функции. Подчеркнем в этой связи, что возможность представления  $\Gamma$  в виде этих скелетных диаграмм (а тем самым и все дальнейшие следствия из них) отнюдь не предполагает парности взаимодействия между частицами, поскольку пунктирные линии здесь в явном виде отсутствуют; от характера взаимодействия в действительности зависит лишь (не интересующая нас здесь) внутренняя структура блоков, изображенных кружками<sup>1)</sup>.

Задача о суммировании ряда (17,3) сводится к решению интегрального уравнения, для получения которого «умножим» весь ряд еще на одно  $\bar{\Gamma}$ , т. е. заменим его рядом

$$\begin{array}{c} \text{штрихованный кружок} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{штрихованный кружок} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{штрихованный кружок} \end{array} = \begin{array}{c} \text{штрихованный кружок} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{штрихованный кружок} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{штрихованный кружок} \end{array} + \begin{array}{c} \text{штрихованный кружок} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{штрихованный кружок} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{штрихованный кружок} \end{array} + \dots$$

<sup>1)</sup> Предполагается лишь такое общее свойство, как сохранение числа частиц. Последнее проявляется в постоянстве разности числа линий, проходящих направо и налево в каждом сечении диаграммы (равной нулю для сечений показанного в (17,3) типа).

Сравнение с исходным рядом (17,3) приводит к равенству

$$\text{Loop}(P_1, P_2, P_1+K, P_2-K, Q, Q+K) = \text{Tree}_1(P_1, P_2, P_1+K, P_2-K) - \text{Tree}_2(P_1, P_2, P_1+K, P_2-K, Q) \quad (17,4)$$

Это диаграммное равенство, будучи записано в аналитическом виде, и дает искомое интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}(K; P_1, P_2) = & \\ = \bar{\Gamma}_{\gamma\delta, \alpha\beta}(P_1, P_2) - i \int \bar{\Gamma}_{\gamma\delta, \alpha\kappa}(P_1, Q) G(Q+K) G(Q) \times & \\ \times \Gamma_{\kappa\delta, \zeta\beta}(K; Q, P_2) \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4}. & \quad (17,5) \end{aligned}$$

Согласно сказанному выше, в функциях  $\bar{\Gamma}$  положено  $K=0$ ; использованы введенные выше сокращенные обозначения  $\Gamma$  и  $\bar{\Gamma}$ , а также положено  $G_{\alpha\beta} = G\delta_{\alpha\beta}$ .

Для исследования этого уравнения рассмотрим прежде всего стоящее в его ядре произведение  $G(Q+K)G(Q)$ . Как уже было отмечено, при малых  $K$  полюсы обоих множителей близки друг к другу. Вблизи этих полюсов  $G$ -функции представляются полными членами (10,2). Обозначив компоненты 4 векторов  $K$  и  $Q$ , согласно

$$K = (\omega, \mathbf{k}), \quad Q = (q_0, \mathbf{q}), \quad (17,6)$$

пишем в этой области

$$\begin{aligned} G(Q)G(Q+K) \approx & \\ \approx Z^2 [q_0 - v_F(q - p_F) + i\delta_1]^{-1} [q_0 + \omega - v_F(|\mathbf{q} + \mathbf{k}| - p_F) + i\delta_2]^{-1}, & \quad (17,7) \end{aligned}$$

где  $\delta_1, \delta_2$  — бесконечно малые добавки, знак которых (вблизи полюсов) определяется согласно

$$\begin{aligned} \text{sign } \delta_1 &= \text{sign}(q - p_F), \\ \text{sign } \delta_2 &= \text{sign}(|\mathbf{q} + \mathbf{k}| - p_F). \end{aligned} \quad (17,8)$$

Знаки  $\delta_1$  и  $\delta_2$  определяют расположение полюсов — в верхней или нижней полуплоскостях комплексной переменной  $q_0$ . Особенность в ядре интегрального уравнения (а с ним и в его решении) возникает в результате зажатия контура интегрирования по  $dq_0$  (вещественная ось) между полюсами, для чего последние должны находиться по разные стороны этого контура, т. е. в разных полуплоскостях.

Предположим сначала, что  $qk > 0$ , т. е.  $\cos \theta > 0$ , где  $\theta$  — угол между  $q$  и  $k$ . Тогда  $|q+k| > q$ , и  $\delta_1$  и  $\delta_2$  имеют различные знаки ( $\delta_1 < 0$ ,  $\delta_2 > 0$ ), если  $q < p_F$ ,  $|q+k| > p_F$ , что ввиду малости  $k$  эквивалентно условиям

$$p_F - k \cos \theta < q < p_F. \quad (17,9)$$

При дальнейшем интегрировании по  $dq_0$  в (17,5) путь интегрирования можно замкнуть бесконечно удаленной полуокружностью (все равно — сверху или снизу), и тогда интеграл определится вычетом подынтегрального выражения в соответствующем полюсе. При этом ввиду узости интервала (17,9) (при малом  $k$ ) в множителях  $\Gamma$  и  $\bar{\Gamma}$  под знаком интеграла можно будет положить  $k=0$  и соответственно для положения полюсов (при малых  $k$ ,  $\omega$ ):  $q_0 \approx 0$ .

Другими словами, в смысле своей роли в ядре интегрального уравнения (17,5) произведение полюсных множителей (17,7) эквивалентно  $\delta$ -функциям

$$A \delta(q_0) \delta(q - p_F)$$

с коэффициентом  $A$ , определенным как интеграл

$$A = \int \frac{Z^2 dq_0 dq}{[q_0 - v_F(q - p_F) + i\delta_1][q_0 + \omega - v_F(|q+k| - p_F) + i\delta_2]}.$$

Когда  $q$  лежит вне интервала (17,9), оба полюса лежат в одной полуплоскости комплексного  $q_0$ , и, замкнув путь интегрирования по  $dq_0$  через другую полуплоскость, убедимся, что интеграл обращается в нуль. В области же (17,9), замкнув путь через одну из полуплоскостей и вычисляя интеграл по вычету в расположенном в этой полуплоскости полюсе, найдем

$$A = \int \frac{2\pi i Z^2 dq}{\omega - v_F(|q+k| - q) + i0}$$

(учтено, что в области (17,9)  $\delta_1 < 0$ ,  $\delta_2 > 0$ ). Поскольку в силу (17,9)  $q \approx p_F \gg k$ , то можно положить  $|q+k| - q \approx k \cos \theta$ , после чего (с учетом пределов (17,9))

$$A = \frac{2\pi i Z^2 k \cos \theta}{\omega - kv_F \cos \theta}.$$

Легко показать тем же способом, что такое же выражение для  $A$  (но с другим знаком у  $i0$ ) получается и при  $\cos \theta < 0$  (когда интегрирование должно производиться по области  $q > p_F$ ,  $|q+k| < p_F$ ). Таким образом, в ядре уравнения (17,5) имеем

$$G(Q)G(Q+K) = \frac{2\pi i Z^2 k \delta(q_0) \delta(q - p_F)}{\omega - v_F k + i0 \cdot \text{sign } \omega} + \varphi(Q), \quad (17,10)$$

где написано  $lk$  вместо  $k \cos \theta$  ( $l = q/q$ ), а функция  $\varphi$  не содержит (при малых  $K$ )  $\delta$ -функционной части, и потому в ней можно положить  $K=0$ .

Подставив (17,10) в (17,5), получим основное интегральное уравнение в виде

$$\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}(K; P_1, P_2) = \tilde{\Gamma}_{\gamma\delta, \alpha\beta}(P_1, P_2) - \\ - i \int \tilde{\Gamma}_{\gamma\zeta, \alpha\kappa}(P_1, Q) \varphi(Q) \Gamma_{\kappa\delta, \zeta\beta}(K; Q, P_2) \frac{d^4Q}{(2\pi)^4} + \\ + \frac{Z^2 p_F^3}{(2\pi)^3} \int \tilde{\Gamma}_{\gamma\zeta, \alpha\kappa}(P_1, Q_F) \Gamma_{\kappa\delta, \zeta\beta}(K; Q_F, P_2) \frac{lk \, d\omega_l}{\omega - v_F lk}. \quad (17,11)$$

В последнем члене подставлено  $d^4Q = q^2 dq \, d\omega_l \, dq_0$  (где  $d\omega_l$  — элемент телесного угла в направлении  $l$ ) и интегрированием по  $dq \, dq_0$  устранены  $\delta$ -функции. В этом члене в функциях  $\Gamma$  и  $\tilde{\Gamma}$  аргумент  $Q$  берется на ферми-поверхности:  $Q_F = (0; p_F l)$ .

Обратим внимание на специфический характер множителя  $lk/(\omega - v_F lk)$  в ядре уравнения (17,11): его предел при  $k \rightarrow 0$ ,  $\omega \rightarrow 0$  зависит от предела, к которому стремится при этом отношение  $\omega/k$ . Таким же характером будет обладать, следовательно, и решение уравнения: предел функции  $\Gamma(K; P_1, P_2)$  при  $K \rightarrow 0$  зависит от способа стремления к нулю  $\omega$  и  $k$ .

Обозначим посредством  $\Gamma^\omega(P_1, P_2)$  предел

$$\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}^\omega(P_1, P_2) = \lim_{K \rightarrow 0} \Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}(K; P_1, P_2) \quad \text{при} \quad k/\omega \rightarrow 0 \quad (17,12)$$

(мы увидим в § 18, что именно с этой величиной связана функция взаимодействия квазичастиц). При таком способе перехода к пределу ядро последнего интегрального члена в (17,11) обращается в нуль, так что  $\Gamma^\omega$  удовлетворяет уравнению

$$\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}^\omega(P_1, P_2) = \\ = \tilde{\Gamma}_{\gamma\delta, \alpha\beta}(P_1, P_2) - i \int \tilde{\Gamma}_{\gamma\zeta, \alpha\kappa}(P_1, Q) \varphi(Q) \Gamma_{\kappa\delta, \zeta\beta}^\omega(Q, P_2) \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}. \quad (17,13)$$

Отметим, что ввиду (15,8)

$$\Gamma_{\delta\gamma, \beta\alpha}^\omega(P_1, P_2) = \Gamma_{\delta\gamma, \beta\alpha}(P_2, P_1). \quad (17,14)$$

Из двух уравнений (17,11) и (17,13) можно исключить  $\tilde{\Gamma}$ . Результат исключения:

$$\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}(K; P_1, P_2) = \Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}^\omega(P_1, P_2) + \\ + \frac{Z^2 p_F^3}{(2\pi)^3} \int \Gamma_{\gamma\zeta, \alpha\kappa}^\omega(P_1, Q_F) \Gamma_{\kappa\delta, \zeta\beta}(K; Q_F, P_2) \frac{lk \, d\omega_l}{\omega - v_F lk}. \quad (17,15)$$

Действительно, если формально записать (17,13) в виде  $\tilde{\Gamma} = \hat{\Gamma}^\omega$ , то (17,11) запишется как

$$\hat{\Gamma} = \tilde{\Gamma} + \frac{Z^2 p_F^3}{(2\pi)^3} \int \tilde{\Gamma} \frac{lk}{\omega - v_F lk} \, d\omega_l.$$

Подставив сюда  $\tilde{\Gamma} = \hat{L}\Gamma^\omega$  и применив к обеим сторонам равенства оператор  $\hat{L}^{-1}$ , получим (17,15).

Введем теперь функцию  $\Gamma^k$  согласно

$$\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}^k(P_1, P_2) = \lim_{K \rightarrow 0} \Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}(K; P_1, P_2) \text{ при } \omega/k \rightarrow 0. \quad (17,16)$$

Именно эта функция (умноженная на  $Z^2$ ) представляет собой амплитуду рассеяния вперед (т. е. перехода  $P_1, P_2 \rightarrow P_1, P_2$ ), отвечающую реальным физическим процессам, происходящим с квазичастицами на ферми-поверхности: столкновения, оставляющие квазичастицы на этой поверхности, сопровождаются изменением импульса без изменения энергии, и потому переход к пределу нулевой передачи импульса ( $k \rightarrow 0$ ) должен производиться при строго равной нулю передаче энергии ( $\omega = 0$ ). Введенная же выше функция  $\Gamma^\omega$  отвечает нефизическому предельному случаю «рассеяния» с малой передачей энергии при строго равной нулю передаче импульса ( $k = 0$ ).

Положив в (17,15)  $\omega = 0$ , перейдя к пределу  $k \rightarrow 0$  и умножив обе стороны равенства на  $Z^2$ , получим

$$Z^2 \Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}^k(P_1, P_2) = Z^2 \Gamma_{\gamma\delta, \alpha\beta}^\omega(P_1, P_2) - \frac{\rho_F^2}{v_F (2\pi)^3} \int Z^2 \Gamma_{\gamma\zeta, \alpha\kappa}^\omega(P_1, Q_F) \cdot Z^2 \Gamma_{\kappa\delta, \zeta\beta}^k(Q_F, P_2) dQ_F. \quad (17,17)$$

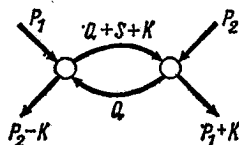
Таким образом, существует общее соотношение, связывающее обе предельные формы амплитуды рассеяния вперед.

Свойства антисимметрии (15,8) для  $\Gamma$  дают некоторую информацию о поведении  $\Gamma^k$  и  $\Gamma^\omega$  при  $P_1 \rightarrow P_2$ . Положив в этом равенстве  $P_1 = P_2$  и  $\alpha = \beta$ , получим

$$\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\alpha}(P_1 + K, P_1 - K; P_1, P_1) = 0 \quad (17,18)$$

(суммирования по  $\alpha$  здесь нет!)<sup>1)</sup>. Переход к  $\Gamma^\omega$  или  $\Gamma^k$  в этом равенстве надо производить с осторожностью, так как в  $\Gamma^\omega$ ,  $\Gamma^k$  сначала положено  $K = 0$ , а в (17,18) — сначала  $P_1 = P_2$ .

Пусть одновременно малы  $K$  и  $P_1 - P_2 \equiv S = (s_0, s)$ . Тогда помимо диаграмм (17,2) будут опасными также и диаграммы



<sup>1)</sup> При учете лишь обменного взаимодействия между спинами квазичастиц из всех  $\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\alpha}$  отличны от нуля лишь  $\Gamma_{\alpha\alpha, \alpha\alpha}$ . Это утверждение выражает собой неизменность вектора спина при рассеянии. Его можно проверить также и непосредственно по выражению вида (2,4).

При  $K, S \rightarrow 0$  функция  $\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\alpha}$  будет зависеть, следовательно, от двух «особых» аргументов:

$$x = \frac{\omega}{k}, \quad y = \frac{s_0 + \omega}{|s + k|},$$

и (17,18) означает обращение этой функции в нуль при  $x=y$ . Будем рассматривать значения  $\Gamma$  на ферми-поверхности; тогда  $\omega = s_0 = 0$ , так что и  $y=0$ . Поэтому в таком пределе равенство (17,18) имеет место, только если и  $x=0$ . Другими словами, на ферми-поверхности оно справедливо для  $\Gamma^k$ :

$$\Gamma_{\gamma\delta, \alpha\alpha}^k(P_1, P_1) = 0 \quad (17,19)$$

(N. D. Mermin, 1967).

### § 18. Связь вершинной функции с функцией взаимодействия квазичастиц

Подобно тому как в образовании матричного элемента (7,9), определяющего одночастичную функцию Грина, участвуют промежуточные состояния с числами частиц  $N \pm 1$ , так в образовании двухчастичной функции Грина (матричный элемент (15,1)) участвуют промежуточные состояния с  $N, N \pm 1, N \pm 2$  частицами<sup>1)</sup>.

Ввиду наличия промежуточных состояний с  $N \pm 1$  частицей двухчастичная функция Грина имеет полюсы, совпадающие с полюсами функции  $G$ , т. е. с энергией квазичастицы. Соответствующие множители, однако, выделены в (15,7) в явном виде. Поэтому определяемая этой формулой вершинная функция  $\Gamma$  имеет лишь полюсы, соответствующие состояниям с  $N$  и  $N \pm 2$  частицами. Момент импульса этих состояний отличается от момента основного состояния на 0 или 1, так что отвечающие этим полюсам элементарные возбуждения имеют целый спин (0 или 1) и потому подчиняются статистике Бозе. Другими словами, полюсы вершинной функции определяют бозевские ветви энергетического спектра ферми-жидкости.

Полюсы, возникающие от промежуточных состояний без изменения числа частиц, отвечают элементарным возбуждениям, представляющим кванты нулевого звука. В диаграммной технике промежуточным состояниям отвечают различные сечения диаграмм, разделяющие их на две части между теми или иными из ее внешних концов. В данном случае промежуточным состоя-

<sup>1)</sup> Состояния с  $N$  частицами возникают при такой, например, последовательности операторов в  $T$ -произведении, как  $\hat{\Psi}_3 \hat{\Psi}_1^+ \hat{\Psi}_4 \hat{\Psi}_2^+$ . Состояния же с  $N+2$  частицами отвечают таким последовательностям, как  $\hat{\Psi}_3 \hat{\Psi}_4 \hat{\Psi}_1^+ \hat{\Psi}_2^+$ .