При K, $S\to 0$ функция $\Gamma_{\gamma\delta,\,\alpha\alpha}$ будет зависеть, следовательно, от двух «особых» аргументов:

$$x=\frac{\omega}{k},\quad y=\frac{s_0+\omega}{|\mathbf{s}+\mathbf{k}|},$$

и (17,18) означает обращение этой функции в нуль при $x=y$. Будем рассматривать значения Γ на ферми-поверхности; тогда $\omega=s_0=0$, так что и $y=0$. Поэтому в таком пределе равенство (17,18) имеет место, только если и $x=0$. Другими словами, на ферми-поверхности оно справедливо для Γ^k:

$$\Gamma^k_{\gamma\delta,\,\alpha\alpha}(P_1,\ P_1)=0 \qquad (17,19)$$

(*N. D. Mermin*, 1967).

§ 18. Связь вершинной функции с функцией взаимодействия квазичастиц

Подобно тому как в образовании матричного элемента (7,9), определяющего одночастичную функцию Грина, участвуют промежуточные состояния с числами частиц $N\pm 1$, так в образовании двухчастичной функции Грина (матричный элемент (15,1)) участвуют промежуточные состояния с N, $N\pm 1$, $N\pm 2$ частицами[1]).

Ввиду наличия промежуточных состояний с $N\pm 1$ частицей двухчастичная функция Грина имеет полюсы, совпадающие с полюсами функции G, т. е. с энергией квазичастицы. Соответствующие множители, однако, выделены в (15,7) в явном виде. Поэтому определяемая этой формулой вершинная функция Γ имеет лишь полюсы, соответствующие состояниям с N и $N\pm 2$ частицами. Момент импульса этих состояний отличается от момента основного состояния на 0 или 1, так что отвечающие этим полюсам элементарные возбуждения имеют целый спин (0 или 1) и потому подчиняются статистике Бозе. Другими словами, полюсы вершинной функции определяют бозевские ветви энергетического спектра ферми-жидкости.

Полюсы, возникающие от промежуточных состояний без изменения числа частиц, отвечают элементарным возбуждениям, представляющим кванты нулевого звука. В диаграммной технике промежуточным состояниям отвечают различные сечения диаграмм, разделяющие их на две части между теми или иными из ее внешних концов. В данном случае промежуточным состоя-

[1]) Состояния с N частицами возникают при такой, например, последовательности операторов в T-произведении, как $\hat\Psi_3\hat\Psi_1^+\hat\Psi_4\hat\Psi_2^+$. Состояния же с $N+2$ частицами отвечают таким последовательностям, как $\hat\Psi_3\hat\Psi_4\hat\Psi_1^+\hat\Psi_2^+$.

ниям без изменения числа частиц отвечают сечения диаграмм (17,3) по одной из пар сплошных линий, соединяющих соседние блоки $\tilde{\Gamma}$; неизменность числа частиц в этих состояниях выражается одинаковостью числа линий, пересекающих сечение в ту и другую стороны. Перенос 4-импульса через такое сечение есть $(Q+K)-Q=K$; соответственно этому, элементарным возбуждениям без изменения числа частиц отвечают полюсы вершинной функции $\Gamma(K;\ P_1,\ P_2)$ по переменной K.

Мы видели выше (при выводе (17,10)), что из двух импульсов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}+\mathbf{k}$ (входящих в 4-векторы Q и $Q+K$) один должен быть больше, а другой меньше предельного импульса p_F. С другой стороны, при возбуждении из основного состояния вне ферми-сферы могут быть только «частицы», а внутри нее — только «дырки». В этом смысле можно сказать, что нулевые возбуждения в ферми-жидкости можно рассматривать как связанные состояния частицы и дырки[1]).

Элементарные же возбуждения, отвечающие промежуточным состояниям с $N\pm 2$ частицами (им соответствуют полюсы функции $\Gamma(K;\ P_1,\ P_2)$ по переменной P_1+P_2), можно было бы рассматривать как связанные состояния двух частиц или двух дырок. Наличие таких состояний, однако, привело бы (как будет показано в главе V) к сверхтекучести ферми-жидкости, что, в свою очередь, требует существенного изменения всего математического аппарата диаграммой техники.

Таким образом, для определения бозевской ветви энергетического спектра несверхтекучей ферми-жидкости надо исследовать полюсы вершинной функции $\Gamma(K;\ P_1,\ P_2)$ по переменной $K=(\omega,\ \mathbf{k})$. При каждом значении $\mathbf{k}$ полюсу отвечает определенная энергия $\omega=\omega(\mathbf{k})$, чем и определяется закон дисперсии этих возбуждений. Для слабо возбужденных состояний ω и $\mathbf{k}$ малы, так что можно использовать уравнения, полученные для функции $\Gamma(K;\ P_1,\ P_2)$ в области малых значений K.

Вблизи полюса функции Γ левая сторона и интеграл в правой стороне уравнения (17,15) сколь угодно велики; член же $\Gamma^{\omega}(P_1,\ P_2)$ остается конечным и потому может быть опущен. Далее замечаем, что переменная P_2, а также индексы β и δ не затрагиваются операциями, производимыми в уравнении (17,15) над функцией Γ, т. е. играют в нем роль несущественных параметров. Наконец, мы будем рассматривать функцию Γ на поверхности ферми-сферы, т. е. положим $P_1=(0,\ p_F\mathbf{n})$, где $\mathbf{n}$ — переменный единичный вектор. Имея все это в виду, заклю-

---

[1]) В такой постановке задача формально имеет много общего с задачей об определении уровней связанных состояний электрона и позитрона в квантовой электродинамике (см. IV § 122). В частности, уравнение (17,4—5) аналогично уравнению Бете—Солпитера IV (122,10—11).

чаем, что определение звуковых возбуждений в ферми-жидкости сводится к задаче о собственных значениях интегрального уравнения

$$\chi_{\gamma\alpha}(\mathbf{n})=\frac{Z^2p_F^2}{(2\pi)^3}\int\Gamma^{\omega}_{\gamma\zeta,\,\alpha\varkappa}(\mathbf{n},\,\mathbf{l})\,\chi_{\varkappa\zeta}(\mathbf{l})\frac{\mathbf{lk}\,do_l}{\omega-v_F\mathbf{lk}},\tag{18,1}$$

где $\chi_{\gamma\alpha}(\mathbf{n})$ — вспомогательная функция.

Преобразуем это уравнение, введя вместо χ новую функцию

$$\nu_{\gamma\alpha}(\mathbf{n})=\frac{\mathbf{nk}}{\omega-v_F\mathbf{nk}}\chi_{\gamma\alpha}(\mathbf{n}).\tag{18,2}$$

Тогда уравнение (18,1) примет вид

$$(\omega-v_F\mathbf{nk})\,\nu_{\gamma\alpha}(\mathbf{n})=\mathbf{kn}\frac{p_F^2Z^2}{(2\pi)^3}\int\Gamma^{\omega}_{\gamma\zeta,\,\alpha\varkappa}(\mathbf{n},\,\mathbf{n}')\,\nu_{\varkappa\zeta}(\mathbf{n}')\,do'\tag{18,3}$$

(обозначение $\mathbf{l}$ заменено на $\mathbf{n}'$).

Это уравнение по форме в точности совпадает с кинетическим уравнением (4,10) для колебаний ферми-жидкости. Сравнение обоих уравнений приводит к следующему соответствию между функцией взаимодействия квазичастиц и функцией Γ^{ω}:

$$f_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(p_F\mathbf{n},\,p_F\mathbf{n}')=Z^2\Gamma^{\omega}_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(\mathbf{n},\,\mathbf{n}').\tag{18,4}$$

Тем самым выясняется связь между функцией f и свойствами рассеяния квазичастиц[1]).

Равенство (18,4) связывает f с амплитудой нефизического процесса рассеяния. Воспользуемся теперь формулой (17,17) и получим с ее помощью явное соотношение между f и «физической» амплитудой рассеяния вперед для квазичастиц на ферми-поверхности, которую обозначим как

$$A_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(\mathbf{n}_1,\,\mathbf{n}_2)=Z^2\Gamma^{k}_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(\mathbf{n}_1,\,\mathbf{n}_2).\tag{18,5}$$

Соотношение (17,17) на ферми-поверхности принимает вид

$$A_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(\mathbf{n}_1,\,\mathbf{n}_2)=$$
$$=f_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(\mathbf{n}_1,\,\mathbf{n}_2)-\frac{p_F^2}{2\pi^2v_F}\int f_{\gamma\zeta,\,\alpha\varkappa}(\mathbf{n}_1,\mathbf{n}')\,A_{\varkappa\delta,\,\zeta\beta}(\mathbf{n}',\mathbf{n}_2)\frac{do'}{4\pi}.\tag{18,6}$$

Спиновая зависимость функций A и f может быть выражена с помощью матриц Паули σ. В общем случае эти функции могут содержать любые скалярные комбинации четырех векто-

[1]) Изложенный общий вывод принадлежит *Л. Д. Ландау* (1958). Для слабо неидеального ферми-газа вывод кинетического уравнения путем суммирования конкретных диаграмм типа (17,3) был ранее произведен *А. Б. Мигдалом* и *В. М. Галицким* (1958). Заметим, что в случае газа в G-функциях (в нулевом приближении) отсутствуют неполюсные члены, и потому вопрос об их исключении не возникает.

ров $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$. Но если взаимодействие между частицами является обменным, то допустимыми скалярными произведениями являются лишь $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$ и $\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2$. Тогда функции A и f можно представить (как это было уже сделано для f в (2,4)) в виде

$$\frac{p_F^2}{\pi^2 v_F} f_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2) = F(\vartheta)\,\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + G(\vartheta)\,\sigma_{\gamma\alpha}\sigma_{\delta\beta},$$
$$\frac{p_F^2}{\pi^2 v_F} A_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2) = B(\vartheta)\,\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + C(\vartheta)\,\sigma_{\gamma\alpha}\sigma_{\delta\beta}, \tag{18,7}$$

где коэффициенты F, G, B, C — функции только от угла ϑ между $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$. Эти функции разлагаем по полиномам Лежандра

$$B(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) B_l P_l(\cos\vartheta), \ \ldots \tag{18,8}$$

Подставив (18,7—8) в (18,6) и вычислив интеграл (используя при этом теорему сложения для полиномов Лежандра), получим

$$B_l = F_l(1 - B_l), \quad C_l = G_l(1 - C_l). \tag{18,9}$$

Этими формулами устанавливается простая алгебраическая связь между коэффициентами разложений f и A.

Условия устойчивости (2,19—20) приводят к аналогичным неравенствам для коэффициентов B_l, C_l:

$$B_l < 1, \quad C_l < 1. \tag{18,10}$$

Кроме того, эти коэффициенты удовлетворяют соотношению, являющемуся следствием формулы (17,19): $B(0) + C(0) = 0$ или

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(B_l + C_l) = 0. \tag{18,11}$$

Равенства (18,9) и (18,11) вместе с условиями (18,10) достаточны для доказательства интересного утверждения: во всякой устойчивой ферми-жидкости существует по крайней мере одна ветвь (обычная или спиновая) аксиально-симметричного нулевого звука[1]).

§ 19. Тождества для производных от функции Грина

В математическом аппарате функций Грина существенную роль играют некоторые тождественные соотношения между производными от этих функций и амплитудой рассеяния квазичастиц. Вывод этих соотношений однотипен: вычисляется изме-

[1]) См. *N. D. Mermin*, Phys. Rev. **159**, 161 (1967).