ров $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\boldsymbol{\sigma}_1$, $\boldsymbol{\sigma}_2$. Но если взаимодействие между частицами является обменным, то допустимыми скалярными произведениями являются лишь $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2$ и $\boldsymbol{\sigma}_1\boldsymbol{\sigma}_2$. Тогда функции A и f можно представить (как это было уже сделано для f в (2,4)) в виде

$$\begin{gathered}\frac{p_F^2}{\pi^2 v_F} f_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2) = F(\vartheta)\,\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + G(\vartheta)\,\sigma_{\gamma\alpha}\sigma_{\delta\beta},\\ \frac{p_F^2}{\pi^2 v_F} A_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(\mathbf{n}_1,\ \mathbf{n}_2) = B(\vartheta)\,\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + C(\vartheta)\,\sigma_{\gamma\alpha}\sigma_{\delta\beta},\end{gathered} \tag{18,7}$$

где коэффициенты F, G, B, C — функции только от угла ϑ между $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$. Эти функции разлагаем по полиномам Лежандра

$$B(\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, B_l P_l(\cos\vartheta), \ \ldots \tag{18,8}$$

Подставив (18,7—8) в (18,6) и вычислив интеграл (используя при этом теорему сложения для полиномов Лежандра), получим

$$B_l = F_l(1-B_l), \quad C_l = G_l(1-C_l). \tag{18,9}$$

Этими формулами устанавливается простая алгебраическая связь между коэффициентами разложений f и A.

Условия устойчивости (2,19—20) приводят к аналогичным неравенствам для коэффициентов B_l, C_l:

$$B_l < 1, \quad C_l < 1. \tag{18,10}$$

Кроме того, эти коэффициенты удовлетворяют соотношению, являющемуся следствием формулы (17,19): $B(0)+C(0)=0$ или

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(B_l + C_l) = 0. \tag{18,11}$$

Равенства (18,9) и (18,11) вместе с условиями (18,10) достаточны для доказательства интересного утверждения: во всякой устойчивой ферми-жидкости существует по крайней мере одна ветвь (обычная или спиновая) аксиально-симметричного нулевого звука[1]).

§ 19. Тождества для производных от функции Грина

В математическом аппарате функций Грина существенную роль играют некоторые тождественные соотношения между производными от этих функций и амплитудой рассеяния квазичастиц. Вывод этих соотношений однотипен: вычисляется изме-

---

[1]) См. *N. D. Mermin*, Phys. Rev. **159**, 161 (1967).

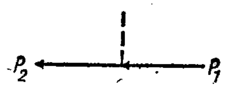
нение гриновской функции под влиянием некоторого фиктивного «внешнего поля», результат воздействия которого на систему известен заранее.

Поэтому прежде всего вычислим изменение δG гриновской функции под влиянием «внешнего поля» произвольного вида. Такому полю соответствует в гамильтониане член

$$\delta\hat{V}^{(1)} = \int \hat{\Psi}_\alpha^+(t, \mathbf{r})\, \delta\hat{U} \hat{\Psi}_\alpha(t, \mathbf{r})\, d^3x, \qquad (19,1)$$

где $\delta\hat{U}$ — некоторый оператор, действующий на функции от $\mathbf{r}$ (и могущий зависеть также от времени t).

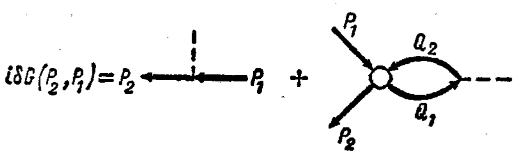
При наличии внешнего поля функция Грина зависит уже от двух 4-импульсов P_1 и P_2. В диаграммной технике такое поле изображается новым графическим элементом — внешней пунктирной линией:



причем такой линии сопоставляется множитель

$$-i\delta U(P_2, P_1) = -i \int e^{iP_2X} \delta\hat{U} e^{-iP_1X}\, d^4X. \qquad (19,2)$$

В первом порядке по внешнему полю поправка к точной функции Грина изображается суммой двух скелетных диаграмм



(19,3)

где все сплошные линии — жирные (точные G-функции), а кружок — точная вершинная функция ($i\Gamma$). В аналитическом виде это равенство записывается как

$$\begin{aligned} i\delta G_{\beta\alpha}(P_2, P_1) = G_{\beta\gamma}(P_2)\, \delta U(P_2, P_1)\, G_{\gamma\alpha}(P_1) - \\ - iG_{\beta\gamma}(P_2)\, G_{\varepsilon\alpha}(P_1) \int \Gamma_{\gamma\delta,\, \varepsilon\zeta}(P_2, Q_1; P_1, Q_2) \times \\ \times \delta U(Q_2, Q_1)\, G_{\zeta\varkappa}(Q_2)\, G_{\varkappa\delta}(Q_1) \frac{d^4Q_1}{(2\pi)^4}, \end{aligned} \qquad (19,4)$$

причем $Q_2 + P_1 = P_2 + Q_1$.

Первые два из интересующих нас тождеств связаны с сохранением числа частиц в системе. В гамильтониане системы это свойство выражается тем, что ψ-операторы входят в него парами: по одному $\hat{\Psi}^+(X)$ и $\hat{\Psi}(X)$ для каждого аргумента X.

Произведем калибровочное преобразование ψ-операторов:

$$\hat{\Psi}_\alpha(X) = \hat{\Psi}'_\alpha(X)\, e^{-i\chi(X)}, \quad \hat{\Psi}^+_\alpha = \hat{\Psi}'^+_\alpha e^{i\chi(X)}, \tag{19,5}$$

где $\chi(X)$ — вещественная функция[1]). В силу указанного характера гамильтониана, если $\hat{\Psi}$ удовлетворяет «уравнению Шредингера» (7,8), то $\hat{\Psi}'$ удовлетворяет тому же уравнению с заменой

$$\Delta \to (\nabla - i\nabla\chi)^2, \quad \frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} - i\frac{\partial\chi}{\partial t}.$$

При бесконечно малом $\chi = \delta\chi$ такое изменение уравнения эквивалентно добавлению к гамильтониану «внешнего поля»

$$\delta\hat{U} = -\frac{\partial\delta\chi}{\partial t} + \frac{i}{2m}(\Delta\,\delta\chi + 2(\nabla\,\delta\chi)\,\nabla).$$

В частности, если

$$\delta\chi(X) = \mathrm{Re}\,(\chi_0 e^{-iKX}), \quad K = (\omega, \mathbf{k}),$$

(причем ввиду линейности последующих операций знак Re можно опустить), то

$$\delta U(P_2, P_1) = i(2\pi)^4 \chi_0 \delta^{(4)}(P_2 - P_1 - K)\left\{\omega - \frac{1}{2m}\mathbf{k}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)\right\}. \tag{19,6}$$

С другой стороны, функция Грина, построенная по ψ-операторам:

$$\hat{\Psi}'_\alpha = \hat{\Psi}_\alpha(1 + i\delta\chi), \quad \hat{\Psi}'^+_\alpha = \hat{\Psi}^+_\alpha(1 - i\delta\chi)$$

отличается от функции, построенной по операторам $\hat{\Psi}$, $\hat{\Psi}^+$, на

$$\delta G_{\alpha\beta}(X_1, X_2) = iG_{\alpha\beta}(X_1 - X_2)[\delta\chi(X_1) - \delta\chi(X_2)]$$

или, в компонентах Фурье:

$$\delta G_{\alpha\beta}(P_2, P_1) = \int \delta G_{\alpha\beta}(X_1, X_2)\, e^{i(P_2X_1 - P_1X_2)}\, d^4X_1\, d^4X_2 = \\ = i[G_{\alpha\beta}(P_1) - G_{\alpha\beta}(P_2)]\,\delta\chi(P_2 - P_1), \tag{19,7}$$

где

$$\delta\chi(P) = \int \delta\chi(X)\, e^{iPX} d^4X = (2\pi)^4 \chi_0 \delta^{(4)}(P - K).$$

Таким образом, одно и то же изменение $\delta G_{\alpha\beta}$ выражено в двух видах: (19,7) и (19,4), куда надо подставить δU из (19,6). Приравняв оба эти выражения друг другу, получим (после замены $G_{\alpha\beta} = G\delta_{\alpha\beta}$ и некоторых переобозначений переменных)

$$\delta_{\alpha\beta}[G(P+K) - G(P)] = G(P+K)\,G(P)\left\{\left[-\omega + \frac{\mathbf{k}(2\mathbf{p}+\mathbf{k})}{2m}\right]\delta_{\alpha\beta} + \right. \\ \left. + i\int \Gamma_{\beta\delta,\,\alpha\delta}(K; P, Q)\,G(Q)\,G(Q-K)\left[\omega - \frac{\mathbf{k}(2\mathbf{q}-\mathbf{k})}{2m}\right]\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\right\}.$$

[1]) Оно аналогично калибровочному преобразованию в квантовой электродинамике (ср. III (111,8—9)).

Искомые тождества получаются путем перехода в этом равенстве к пределу ω, $\mathbf{k}\to 0$; при этом

$$G(P+K)-G(P)\to\omega\frac{\partial G}{\partial p_0}+\mathbf{k}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}} \tag{19,8}$$

(где $P=(p_0,\ \mathbf{p})$). Произведя этот переход при условии $k/\omega\to 0$, получим первое тождество

$$\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial G(P)}{\partial p_0}=-\{G^2(P)\}_\omega\left[\delta_{\alpha\beta}-i\int\Gamma^{\omega}_{\beta\delta,\,\alpha\delta}(P,\ Q)\,\{G^2(Q)\}_\omega\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\right]. \tag{19,9}$$

Здесь введено обозначение

$$\{G^2(P)\}_\omega=\lim_{\omega,\,\mathbf{k}\to 0}G(P)\,G(P+K)\quad\text{при}\quad k/\omega\to 0. \tag{19,10}$$

Аналогичным образом, произведя предельный переход при условии $\omega/k\to 0$, получим еще одно тождество

$$\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial G}{\partial \mathbf{p}}=\{G^2(P)\}_k\left[\frac{\mathbf{p}}{m}\delta_{\alpha\beta}-i\int\Gamma^{k}_{\beta\delta,\,\alpha\delta}(P,\ Q)\frac{\mathbf{q}}{m}\{G^2(Q)\}_k\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\right] \tag{19,11}$$

с аналогичным обозначением $\{G^2(P)\}_k$.

Далее, рассмотрим изменение функции Грина при наложении на систему постоянного поля

$$\delta\hat{U}=\delta U(\mathbf{r})=U_0e^{i\mathbf{kr}}. \tag{19,12}$$

При $\mathbf{k}\to 0$ это поле медленно меняется в пространстве, так что его влияние на систему может рассматриваться макроскопически. Согласно термодинамическому условию равновесия во внешнем поле, должно быть $\mu+\delta U=\text{const}$ (см. V § 25); при $\mathbf{k}\to 0$ это значит что химический потенциал μ изменяется на малую величину $-U_0$. Соответствующее изменение функции Грина:

$$\delta G_{\alpha\beta}(X_1,\ X_2)=-U_0\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial G(X_1-X_2)}{\partial\mu},$$

а его фурье-компонента (определенная, как в (19,7)):

$$\delta G_{\alpha\beta}(P_2,\ P_1)=-(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(P_2-P_1)\,U_0\frac{\partial G(P_1)}{\partial\mu}.$$

С другой стороны, это же изменение функции Грина можно вычислить по формуле (19,4), положив в ней на этот раз

$$\delta U(P_2,\ P_1)=(2\pi)^4\,U_0\delta^{(4)}(P_2-P_1-K),\quad (K=0,\ \mathbf{k}).$$

Переход к пределу $\mathbf{k}\to 0$ в данном случае (постоянное поле

$\omega \equiv 0$) отвечает случаю $\omega/k \to 0$. В результате получаем тождество

$$\delta_{\alpha\beta}\frac{\partial G(P)}{\partial\mu} = -\{G^2(P)\}_k\left[\delta_{\alpha\beta} - i\int \Gamma^k_{\beta\delta,\alpha\delta}(P, Q)\{G^2(Q)\}_k\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\right] \quad (19{,}13)$$

Наконец, последнее тождество возникает как следствие галилеевской инвариантности системы. Для его вывода рассмотрим жидкость в системе координат, движущейся с медленно меняющейся со временем малой скоростью $\delta\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_0 e^{-i\omega t}$. Переход к такой системе эквивалентен наложению внешнего поля, оператор которого[1])

$$\delta\hat{U} = -\frac{1}{m}\delta\mathbf{w}\cdot\hat{\mathbf{p}} = \frac{i}{m}\delta\mathbf{w}\cdot\nabla \quad (19{,}14)$$

или, в импульсном представлении,

$$\delta U(P_2, P_1) = -\frac{1}{m}\mathbf{p}_1\delta\mathbf{w}(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_2 - P_1 - K), \quad K = (\omega, 0).$$

Это выражение надо подставить в (19,4), после чего производим предельный переход $\omega \to 0$.

С другой стороны, при $\omega \to 0$ речь идет о преобразовании Галилея от одной инерциальной системы отсчета к другой, движущейся с постоянной скоростью $\delta\mathbf{w}$. Если в жидкости имеется элементарное возбуждение с энергией $\varepsilon(\mathbf{p})$, то в системе отсчета, движущейся относительно жидкости со скоростью $\delta\mathbf{w}$, энергия этого возбуждения будет $\varepsilon - \mathbf{p}\delta\mathbf{w}$ [2]). Поэтому в новой системе отсчета частота p_0 должна входить в функцию $G(P)$ в комбинации $p_0 + \mathbf{p}\delta\mathbf{w}$ (так, чтобы полюс функции сдвинулся на $-\mathbf{p}\delta\mathbf{w}$). Таким образом,

$$\delta G = \mathbf{p}\delta\mathbf{w}\frac{\partial G}{\partial p_0},$$

и мы приходим к тождеству

$$\delta_{\alpha\beta}\mathbf{p}\frac{\partial G(P)}{\partial p_0} = -\{G^2(P)\}_\omega\left\{\delta_{\alpha\beta}\mathbf{p} - i\int \Gamma^\omega_{\beta\delta,\alpha\delta}(P, Q)\,\mathbf{q}\,\{G^2(Q)\}_\omega\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\right\}. \quad (19{,}15)$$

Нам придется ниже применять полученные тождества, в частности, при значениях свободной переменной $P = (p_0, \mathbf{p})$ на ферми-поверхности: $P_F = (0, \mathbf{p}_F)$. Перенеся множитель $G^2(P)$ из правых сторон тождеств в левые, заменим там производные от $G(P)$

---

[1]) В классической функции Лагранжа свободной частицы $L = mv^2/2$ переход к движущейся системе координат совершается заменой $\mathbf{v} \to \mathbf{v} + \delta\mathbf{w}$ и приводит к появлению малой (при малом $\delta\mathbf{w}$) добавки $\delta L = m\mathbf{v}\delta\mathbf{w}$. Соответственно (ср. I (40,7)) добавка к функции Гамильтона $\delta H = -\mathbf{p}\delta\mathbf{w}$, а в квантовой механике ей отвечает оператор (19,14).

[2]) Ср. более подробные рассуждения ниже, в § 23.

производными от $G^{-1}(P)$; при этом способ перехода к пределу $K \to 0$ в $G(P)\,G(P+K)$ несуществен.

С другой стороны, вблизи ферми-поверхности функция Грина определяется своим полюсным членом, так что

$$G^{-1}(P)=\frac{1}{Z}\left[p_0-v_F(p-p_F)\right].$$

Отсюда, на самой этой поверхности,

$$\frac{\partial G^{-1}}{\partial p_0}=\frac{1}{Z}, \quad \frac{\partial G^{-1}}{\partial \mu}=\frac{v_F}{Z}\frac{dp_F}{d\mu}.$$

В результате, например, тождества (19,9) и (19,13) принимают на ферми-поверхности вид

$$i\int \Gamma^{\omega}_{\beta\delta,\,\alpha\delta}(P_F,\,Q)\,\{G^2(Q)\}_{\omega}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}=\left(1-\frac{1}{Z}\right)\delta_{\alpha\beta}, \qquad (19,16)$$

$$i\int \Gamma^{k}_{\beta\delta,\,\alpha\delta}(P_F,\,Q)\,\{G^2(Q)\}_{k}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}=\left(1-\frac{v_F}{Z}\frac{dp_F}{d\mu}\right)\delta_{\alpha\beta}. \qquad (19,17)$$

§ 20. Вывод связи между предельным импульсом и плотностью

Полученные в предыдущих параграфах соотношения позволяют дать последовательное доказательство основного положения теории ферми-жидкости Ландау: утверждения о том, что связь между предельным импульсом p_F и плотностью жидкости N/V дается той же формулой (1,1), что и для идеального газа.

Идея доказательства состоит в независимом вычислении изменений N и p_F при бесконечно малом изменении химического потенциала μ и затем их сравнении.

Согласно (7,24), полное число частиц (в заданном объеме V) как функция химического потенциала дается интегралом

$$N=-2iV\lim_{t\to -0}\int G(P)\,e^{-ip_0t}\frac{d^4P}{(2\pi)^4}, \quad P=(p_0,\,\mathbf{p}). \qquad (20,1)$$

Отсюда производная

$$\frac{1}{V}\frac{dN}{d\mu}=-2i\int\frac{\partial G(P)}{\partial\mu}\frac{d^4P}{(2\pi)^4}. \qquad (20,2)$$

Ввиду сходимости этого интеграла при больших p_0 ($\partial G/\partial\mu \sim 1/p_0^2$ при $|p_0|\to\infty$) писать множитель e^{-ip_0t} в подынтегральном выражении уже не надо. После подстановки сюда $\partial G/\partial\mu$ из тождества (19,13) (просуммированного по $\alpha=\beta$) находим

$$\frac{1}{V}\frac{dN}{d\mu}=2i\int\{G^2(P)\}_k\frac{d^4P}{(2\pi)^4}+\int\{G^2(P)\}_k\,\Gamma^k(P,\,Q)\,\{G^2(Q)\}_k\frac{d^4P\,d^4Q}{(2\pi)^8},$$