производными от $G^{-1}(P)$; при этом способ перехода к пределу $K \to 0$ в $G(P)\,G(P+K)$ несуществен.

С другой стороны, вблизи ферми-поверхности функция Грина определяется своим полюсным членом, так что

$$G^{-1}(P)=\frac{1}{Z}\left[p_0-v_F(p-p_F)\right].$$

Отсюда, на самой этой поверхности,

$$\frac{\partial G^{-1}}{\partial p_0}=\frac{1}{Z}, \quad \frac{\partial G^{-1}}{\partial \mu}=\frac{v_F}{Z}\frac{dp_F}{d\mu}.$$

В результате, например, тождества (19,9) и (19,13) принимают на ферми-поверхности вид

$$i\int \Gamma^{\omega}_{\beta\delta,\,\alpha\delta}(P_F,\,Q)\,\{G^2(Q)\}_{\omega}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}=\left(1-\frac{1}{Z}\right)\delta_{\alpha\beta}, \tag{19,16}$$

$$i\int \Gamma^{k}_{\beta\delta,\,\alpha\delta}(P_F,\,Q)\,\{G^2(Q)\}_{k}\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}=\left(1-\frac{v_F}{Z}\frac{dp_F}{d\mu}\right)\delta_{\alpha\beta}. \tag{19,17}$$

§ 20. Вывод связи между предельным импульсом и плотностью

Полученные в предыдущих параграфах соотношения позволяют дать последовательное доказательство основного положения теории ферми-жидкости Ландау: утверждения о том, что связь между предельным импульсом p_F и плотностью жидкости N/V дается той же формулой (1,1), что и для идеального газа.

Идея доказательства состоит в независимом вычислении изменений N и p_F при бесконечно малом изменении химического потенциала μ и затем их сравнении.

Согласно (7,24), полное число частиц (в заданном объеме V) как функция химического потенциала дается интегралом

$$N=-2iV\lim_{t\to -0}\int G(P)\,e^{-ip_0t}\frac{d^4P}{(2\pi)^4}, \quad P=(p_0,\,\mathbf{p}). \tag{20,1}$$

Отсюда производная

$$\frac{1}{V}\frac{dN}{d\mu}=-2i\int\frac{\partial G(P)}{\partial\mu}\frac{d^4P}{(2\pi)^4}. \tag{20,2}$$

Ввиду сходимости этого интеграла при больших p_0 ($\partial G/\partial\mu \sim 1/p_0^2$ при $|p_0| \to \infty$) писать множитель e^{-ip_0t} в подынтегральном выражении уже не надо. После подстановки сюда $\partial G/\partial\mu$ из тождества (19,13) (просуммированного по $\alpha=\beta$) находим

$$\frac{1}{V}\frac{dN}{d\mu}=2i\int\{G^2(P)\}_k\frac{d^4P}{(2\pi)^4}+\int\{G^2(P)\}_k\,\Gamma^k(P,\,Q)\,\{G^2(Q)\}_k\frac{d^4P\,d^4Q}{(2\pi)^8},$$

где для краткости $\Gamma = \Gamma_{\alpha\gamma,\,\alpha\gamma}$. Цель дальнейшего вычисления состоит в том, чтобы выразить правую часть этого равенства через интеграл только по ферми-поверхности.

Прежде всего подставим вместо Γ^k во втором интеграле выражение из (17,17) (заменив в нем обозначение Q_F на S_F):

$$\frac{1}{V}\frac{dN}{d\mu} = 2i\int \{G^2(P)\}_k \frac{d^4P}{(2\pi)^4} + \int \{G^2(P)\}_k \Gamma^\omega(P,\ Q)\{G^2(Q)\}_k \frac{d^4P\,d^4Q}{(2\pi)^8} - \\ - \frac{p_F^2 Z^2}{v_F(2\pi)^3}\int \{G^2(P)\}_k \Gamma^\omega_{\alpha\zeta,\,\alpha\varkappa}(P,\ S_F)\,\Gamma^k_{\varkappa\gamma,\,\zeta\gamma}(S_F,\ Q)\{G^2(Q)\}_k \frac{d^4P\,d^4Q\,do_s}{(2\pi)^8}. \tag{20,3}$$

Преобразуем сначала последний член. В его подынтегральном выражении от Q зависят только последние два множителя; интеграл от них по d^4Q определяется (на ферми-поверхности, $S = S_F$) формулой (19,17), так что этот член принимает вид

$$i\frac{p_F^2 Z^2}{v_F(2\pi)^3}\int \{G^2(P)\}_k \Gamma^\omega(P,\ S_F)\frac{d^4P\,do_s}{(2\pi)^4}\left(1 - \frac{v_F}{Z}\frac{dp_F}{d\mu}\right).$$

Далее, вспомним, что при интегрировании по d^4P предельные значения $G(P)\,G(P+K)$ надо понимать в смысле (17,10); поэтому $\{G^2(P)\}_\omega = \varphi(P)$, а

$$\{G^2(P)\}_k = \{G^2(P)\}_\omega - \frac{2\pi i Z^2}{v_F}\,\delta(p_0)\,\delta(p - p_F). \tag{20,4}$$

После этой замены получим

$$i\frac{p_F^2 Z^2}{v_F(2\pi)^3}\left(1 - \frac{v_F}{Z}\frac{dp_F}{d\mu}\right)\left\{\int \{G^2(P)\}_\omega \Gamma^\omega(P,\ S_F)\frac{d^4P\,do_s}{(2\pi)^4} - 8\pi i\overline{F}\right\},$$

где, согласно (18,4), введена функция взаимодействия квазичастиц и использовано выражение $f_{\alpha\xi,\,\alpha\xi}$ через функцию $F(\vartheta)$ согласно (2,6—7); черта над F означает интегрирование по $do/4\pi$. Оставшийся интеграл по d^4P дается формулой (19,16), после чего интегрирование по do_s дает еще множитель 4π. В результате третий член в (20,3) оказывается равным

$$-\frac{p_F^2 Z^2}{v_F \pi^2}\left(\frac{v_F}{Z}\frac{dp_F}{d\mu} - 1\right)\left\{1 - \frac{1}{Z} + \overline{F}\right\}. \tag{20,5}$$

Аналогичным образом преобразуется второй член в (20,3): величины $\{G^2(P)\}_k$ и $\{G^2(Q)\}_k$ выражаются через $\{G^2(P)\}_\omega$ и $\{G^2(Q)\}_\omega$ согласно (20,4), после чего используются тождества (19,9) и (19,16). В результате этот член оказывается равным

$$-2i\int \frac{\partial G}{\partial p_0}\frac{d^4P}{(2\pi)^4} - 2i\int \{G^2(P)\}_\omega \frac{d^4P}{(2\pi)^4} + \frac{p_F^2 Z^2}{v_F\pi^2}\left\{2\left(\frac{1}{Z} - 1\right) - \overline{F}\right\}. \tag{20,6}$$

Первый интеграл обращается в нуль при интегрировании по dp_0, поскольку $G\to 0$ при $p_0\to\pm\infty$.

Наконец, первый член в (20,3) после подстановки в него (20,4) дает

$$2i\int\{G^2(P)\}_\omega\frac{d^4P}{(2\pi)^4}+\frac{p_F^2Z^2}{v_F\pi^2}. \qquad (20,7)$$

Сложив теперь все вклады (20,5—7), найдем

$$\frac{1}{V}\frac{dN}{d\mu}=\frac{p_F^2}{\pi^2}\frac{dp_F}{d\mu}+\frac{p_F^2Z}{\pi^2v_F}\left\{1-\frac{dp_F}{d\mu}v_F(1+\bar F)\right\}. \qquad (20,8)$$

С другой стороны, производная

$$\frac{d\mu}{dp_F}=\left(\frac{\partial\mu}{\partial N}\right)_V\left(\frac{\partial N}{\partial p_F}\right)_V=\frac{Vp_F^2}{\pi^2\hbar^3}\frac{\partial\mu}{\partial N},$$

согласно (2,15), равна

$$\frac{d\mu}{dp_F}=v_F(1+\bar F). \qquad (20,9)$$

Подчеркнем, что при выводе (2,15) еще не использовалась конкретная зависимость p_F от N/V, и поэтому мы имеем право применить здесь это соотношение с целью нахождения указанной зависимости (равенство (20,9) можно, конечно, получить и с помощью тех же соотношений для вершинных функций, которые были использованы при выводе (20,8)) [1]).

С учетом этого равенства мы видим, что фигурная скобка в (20,8) обращается в нуль и, таким образом,

$$\frac{d}{d\mu}\frac{N}{V}=\frac{p_F^2}{2\pi^2}\frac{dp_F}{d\mu}=\frac{d}{d\mu}\left[\frac{8\pi p_F^3}{3(2\pi)^3}\right]. \qquad (20,10)$$

При $N/V\to 0$ мы имеем дело с газом, так что в этом пределе зависимость p_F от N/V во всяком случае должна совпадать с газовой. Этим условием устанавливается постоянная при интегрировании (20,10), и мы приходим, наконец, к искомому соотношению (1,1):

$$\frac{N}{V}=\frac{8\pi p_F^3}{3(2\pi)^3}.$$

---

[1]) Формула же (2,11) для эффективной массы может быть выведена с помощью соотношения (17,17) и тождеств (19,11) и (19,15).