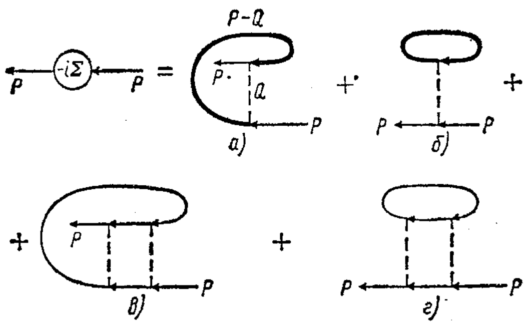
§ 21. Гриновская функция почти идеального ферми-газа

Для иллюстрации способа применения диаграммной техники в этом параграфе мы применим ее к вычислению гриновской функции почти идеального ферми-газа в рамках той же модели, которая была рассмотрена в § 6 с помощью обычной теории возмущений (*В. М. Галицкий*, 1958). Напомним, что речь идет о газе с отталкиванием между частицами, причем описанный в § 6 прием позволяет применять к этому взаимодействию теорию возмущений до тех пор, пока в окончательный результат вычисления входит только амплитуда рассеяния.

Как было показано в § 14, нахождение функции Грина сводится к вычислению собственно-энергетической функции $\Sigma_{\alpha\beta}(P)$. В первом и втором приближениях теории возмущений она дается совокупностью диаграмм (14,9) и (14,10). Изобразим их здесь следующим образом:



(21,1)

Диаграммы (21,1а—б) охватывают собой диаграммы первого порядка (14,10а) и (14,9а) и диаграммы второго порядка (14,10б—в) и (14,9б—в); последние отличаются от первых лишь поправками к внутренней сплошной линии; эти линии изображены в (21,1а—б) жирными и им должны сопоставляться, следовательно, не гриновские функции идеального газа $G^{(0)}$, а функции G, исправленные до членов первого порядка. Наконец, (21,1в—г)—это диаграммы второго порядка (14,10г—д). Все диаграмы деформированы так, что становится ясным характер их структуры; это — первые члены «лестничного» ряда четырехконцевых диаграмм, в которых по паре из внешних линий «закорочены» друг с другом двумя различными способами.

Начнем с вычисления диаграммы (21,1а). Ее аналитическое выражение

$$[-i\Sigma(P)]_a = \int U(Q)\, G(P-Q) \frac{d^4Q}{(2\pi)^4}, \qquad Q = (q_0, \mathbf{q}), \quad P = (\omega, \mathbf{p}) \tag{21,2}$$

(общий множитель $\delta_{\alpha\beta}$ опущен). Произведем сначала интегрирование по dq_0. Поскольку, однако, множитель $U(Q) \equiv U(\mathbf{q})$ от q_0 не зависит, а $G \backsim 1/q_0$ при $|q_0| \to \infty$, то необходимо предварительно уточнить способ интегрирования. Для этого надо вернуться к происхождению диаграммы (21,1а) и заметить, что сплошная линия в ней соответствует свертке пары ψ-операторов внутри одного и того же оператора $\hat{V}$. Это значит, что $\hat{\Psi}$ и $\hat{\Psi}^+$ берутся в одинаковый момент времени, и при свертывании $\hat{\Psi}^+$ стоит слева от $\hat{\Psi}$. Другими словами, в координатном представлении возникающая G-функция берется при $t = t_1 - t_2 \to -0$. В импульсном же представлении это означает добавление в подынтегральном выражении в (21,2) множителя $\exp(-iq_0t)$ с переходом к пределу $t \to -0$. Использовав теперь формулу (7,20), получим

$$[-i\Sigma]_а = i\int U(\mathbf{q}) N(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \frac{d^3q}{(2\pi)^3}, \tag{21,3}$$

где $N(\mathbf{p})$ — функция распределения частиц.

Фурье-компонента $U(\mathbf{q})$ существенно зависит от величины $\mathbf{q}$ лишь при $q \gtrsim 1/r_0$, где r_0 — радиус действия поля $U(r)$; эти значения заведомо велики (для разреженного газа) по сравнению с p_F. Если ограничиться значениями $|p-p_F| \ll 1/r_0$, то при указанных значениях $\mathbf{q}$ будет $N(\mathbf{p}-\mathbf{q}) \approx 0$. Поэтому $U(\mathbf{q})$ в (21,3) можно заменить на $U(0)$ и вынести из-под знака интеграла[1]. Оставшийся интеграл равен половине (заданное значение проекции спина!) плотности газа $n(\mu)$, так что $[\Sigma]_а = -n(\mu)U(0)/2$.

Диаграмма же (21,1б) с замкнутой на себя сплошной линией дает $[\Sigma]_б = n(\mu)U(0)$. Таким образом, вклад в Σ от обоих диаграмм есть

$$[\Sigma]_{а,\,б} = \frac{1}{2} n(\mu) U(0) = \frac{2\pi}{m} n(\mu) a, \tag{21,4}$$

где a — длина рассеяния, определенная согласно (6,2).

Выражение (21,4) содержит в себе, в частности, весь эффект первого порядка. В этом приближении $n(\mu)$ надо понимать как плотность идеального газа $n^{(0)}(\mu)$, так что

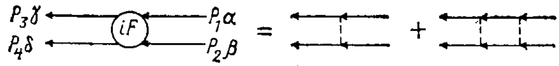
$$\Sigma^{(1)} \equiv [\Sigma]^{(1)}_{а,б} = \frac{2\pi}{m} n^{(0)}(\mu) a. \tag{21,5}$$

Для дальнейшего вычисления введем, в качестве промежуточного обозначения, функцию F, определенную лестничными

---

[1]) Допускаемая таким образом погрешность имеет, как легко видеть, относительный порядок величины $\sim (p_Fr_0)^2$ и потому не отражается даже на членах следующего по p_Fr_0 порядка.

диаграммами:



(21,6)

(как всегда, $P_1+P_2=P_3+P_4$). В аналитическом виде

$$iF_{\gamma\delta,\,\alpha\beta}(P_3,\ P_4;\ P_1,\ P_2)=i\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}\,(F^{(1)}+F^{(2)}),\tag{21,7}$$

где

$$iF^{(1)}=-iU(P_3-P_1),\tag{21,8}$$

$$iF^{(2)}=\int G^{(0)}(P')\,U(P_1-P')\,G^{(0)}(P_1+P_2-P')\,U(P'-P_3)\frac{d^4P'}{(2\pi)^4}.\tag{21,9}$$

Раскрыв обе диаграммы (21,1в—г) и выразив их через $F^{(2)}$, получим

$$[-i\Sigma(P)]_{\text{в, г}}=-\int G^{(0)}(Q)\,F^{(2)}(P,\ Q;\ Q,\ P)\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}+\\ +2\int G^{(0)}(Q)\,F^{(2)}(P,\ Q;\ P,\ Q)\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}\tag{21,10}$$

(такие же интегралы с $F^{(1)}$ вместо $F^{(2)}$ дают (21,5)). Разница знаков перед двумя интегралами связана с наличием замкнутой петли в диаграмме (21,1г); δ-множители в первой диаграмме дают $\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\gamma\beta}=\delta_{\alpha\beta}$, а во второй: $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\gamma}=2\delta_{\alpha\beta}$.

Перейдем к вычислению $F^{(2)}$. Поскольку $U(Q)$ не зависит от q_0, то интегрирование по dp_0' сводится к интегралу

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}G^{(0)}(P')\,G^{(0)}(P_1+P_2-P')\frac{dp_0'}{2\pi}.$$

Подставив сюда $G^{(0)}$ из (9,9) (и учитывая сходимость интеграла при $|p_0'|\to\infty$), замыкаем путь интегрирования бесконечно удаленной полуокружностью в одной из полуплоскостей комплексного p_0'; интеграл отличен от нуля, лишь если полюсы двух функций $G^{(0)}$ лежат в различных полуплоскостях, т. е.

$$\operatorname{sign}(p'-p_F)=\operatorname{sign}(|\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}'|-p_F).\tag{21,11}$$

В результате получим

$$F^{(2)}(P_3,\ P_4;\ P_1,\ P_2)=\\ =-\int\frac{U(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}')\,U(\mathbf{p}'-\mathbf{p}_3)\operatorname{sign}(p'-p_F)}{\omega_1+\omega_2+2\mu-\frac{1}{2m}[\mathbf{p}'^2+(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}')^2]+i0\cdot\operatorname{sign}(p'-p_F)}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}\tag{21,12}$$

(где $\omega_1\equiv p_{10}$, $\omega_2\equiv p_{20}$). При этом, чтобы автоматически учесть требование (21,11), в числителе подынтегрального выражения следует заменить

$$\operatorname{sign}(p'-p_F) \to 1-\theta(\mathbf{p}')-\theta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}'),$$

где $\theta(\mathbf{p})$ — ступенчатая функция (1,10).

Мы видели в § 16, что ряд лестничных диаграмм определяет (в вакууме) амплитуду взаимного рассеяния двух частиц. Поэтому выражение (21,12) содержит в себе поправку к членам первого порядка в амплитуде рассеяния. Эту поправку можно учесть, заменив в $F^{(1)}$ (21,8)

$$U(\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_1) \to -\frac{4\pi}{m}\operatorname{Re} f(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1)$$

(где f — точная до второго порядка амплитуда рассеяния в вакууме)[1]) и одновременно вычтя из выражения $F^{(2)}$ (21,12) вещественную часть его значения в вакууме, т. е. при $p_F=0$, $\mu=0$ и значениях $\omega_1=p_1^2/2m$, $\omega_2=p_2^2/2m$, отвечающих энергиям двух реальных сталкивающихся частиц («физические» внешние концы диаграмм). После этого можно уже будет заменить — $\operatorname{Re} f$ значением при нулевой энергии, т. е. длиной рассеяния a[2]). Таким образом, будем иметь

$$F^{(2)}(P_3, P_4; P_1, P_2)=$$
$$=-\left(\frac{4\pi a}{m}\right)^2\int\left\{\frac{1-\theta(\mathbf{p}')-\theta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}')}{\omega_1+\omega_2+2\mu-\frac{1}{2m}\left[p'^2+(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}')^2\right]+i0\cdot\operatorname{sign}(p'-p_F)}-\right.$$
$$\left.-\mathrm{P}\frac{2m}{p_1^2+p_2^2-p'^2-(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}')^2}\right\}\frac{d^3p'}{(2\pi)^3}. \qquad (21,13)$$

Знак P во втором члене означает, что интеграл берется в смысле главного значения; это — результат отделения вещественной части интеграла с помощью правила (8,11).

Поскольку выражение (21,13) симметрично по P_1 и P_2, оба интеграла в (21,10) совпадают, так что

$$[-i\Sigma(P)]_{\text{в, г}}=\int G^{(0)}(Q)\,F^{(2)}(P, Q; P, Q)\frac{d^4Q}{(2\pi)^4}.$$

[1]) Не смешивать f в этом параграфе с функцией взаимодействия квазичастиц!

[2]) Эта замена не могла быть произведена в (21,12), так как привела бы к расходимости интеграла при больших $\mathbf{p}'$. После произведенного же вычитания интеграл сходится (при $p'\sim p_F$) уже и с такой заменой, что и позволяет произвести ее. Вычитание лишь вещественной части интеграла (и соответственно замена U через $\operatorname{Re} f$) произведено с целью избежать затруднения, связанного с мнимой частью амплитуды рассеяния. Дело в том, что при малых импульсах $\operatorname{Re} f$ разлагается по четным, а $\operatorname{Im} f$ — по нечетным степеням импульса (см. III § 132). Поэтому учет импульсной зависимости f привел бы к поправкам относительного порядка $(q_F a)^2$, т. е. пренебрежимым. Замена же $U \to -4\pi f/m$ потребовала бы учета мнимой части f, приводящей к поправкам относительного порядка величины $p_F a$.

При подстановке сюда первого члена из (21,13) интеграл по dq_0 отличен от нуля, если

$$\operatorname{sign}(p'-p_F) = -\operatorname{sign}(q-p_F), \tag{21,14}$$

так что оба полюса подынтегрального выражения снова находятся в разных полуплоскостях q_0. При подстановке же второго члена из (21,13) от q_0 будет зависеть только множитель $G_0(Q)$, интегрирование по dq_0 осуществляется формулой (7,23) и дает $N^{(0)}(\mathbf{q})$—функцию распределения частиц в идеальном газе, т. е. ступенчатую функцию $\theta(\mathbf{q})$. В результате получим (собрав вклады от всех диаграмм (21,1 а—г))

$$\Sigma(\omega, \mathbf{p}) = \frac{2\pi}{m} n(\mu) a + \Sigma^{(2)}(\omega, \mathbf{p}), \tag{21,15}$$

где

$$\Sigma^{(2)}(\omega, \mathbf{p}) = \left(\frac{4\pi a}{m}\right)^2 \int \left\{ \frac{[1-\theta(\mathbf{p}')-\theta(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{p}')][\theta(\mathbf{q})-\theta(\mathbf{p}')]}{\omega+\mu+\frac{1}{2m}[q^2-p'^2-(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{p}')^2]+i0\cdot\operatorname{sign}(p'-p_F)} - \mathrm{P}\frac{2m\theta(\mathbf{q})}{p^2+q^2-p'^2+(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{p}')^2} \right\} \frac{d^3q\, d^3p'}{(2\pi)^6} \tag{21,16}$$

(множитель $\theta(\mathbf{q})-\theta(\mathbf{p}')$ в числителе первого члена под знаком интеграла заменяет собой $-\operatorname{sign}(q-p_F)$ при условии (21,14)).

Заметим прежде всего, что Σ имеет мнимую часть. Она выделяется из (21,16) с помощью правила (8,11) и дается выражением

$$\operatorname{Im}\Sigma(\omega, \mathbf{p}) = -\left(\frac{4\pi a}{m}\right)^2 \pi \int \{\theta(\mathbf{q})[1-\theta(\mathbf{p}')][1-\theta(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{p}')] - [1-\theta(\mathbf{q})]\theta(\mathbf{p}')\theta(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{p}')\} \times \delta\left[\omega+\mu+\frac{1}{2m}(q^2-p'^2-(\mathbf{p}+\mathbf{q}-\mathbf{p}')^2)\right]\frac{d^3q\, d^3p'}{(2\pi)^6} \tag{21,17}$$

(выражение в фигурных скобках преобразовано с учетом того, что $\theta^2(\mathbf{p}) \equiv \theta(\mathbf{p})$).

Спектр энергий квазичастиц вычисляется, согласно (14,13), как

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{2\pi}{m} n(\mu) a + \Sigma^{(2)}\left(\frac{p^2}{2m}-\mu, \mathbf{p}\right) \tag{21,18}$$

(в $\Sigma^{(2)}$ можно, с требуемой точностью, положить $\varepsilon \approx p^2/2m$). Комплексность Σ означает наличие затухания у возбуждений ($\operatorname{Im}\varepsilon \neq 0$).

Появление этого затухания выражает неустойчивость квазичастиц, связанную с возможностью реального процесса их распада. Квазичастица может отдать часть своей энергии, за счет которой рождается пара квазичастиц (частица и дырка). Рассмотрим, например, первый член в фигурных скобках под интегралом в (21,17). По свойствам ступенчатой функции этот член отличен от нуля, если

$$p' > p_F, \quad |\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}'| > p_F, \quad q < p_F.$$

Эти неравенства отвечают процессу, в котором квазичастица с начальным импульсом $\mathbf{p}$ $(p > p_F)$ переходит в состояние $\mathbf{p}'$ $(p > p' > p_F)$, причем импульс $\mathbf{p}-\mathbf{p}'$ передается частице внутри ферми-сферы (импульс $q < p_F$), возбуждаемой до состояния с импульсом $\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}'$ вне ферми-сферы; такой переход эквивалентен появлению двух новых элементарных возбуждений — с импульсами $-\mathbf{q}$ (дырка) и $\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}'$. Закон сохранения энергии в этом процессе выражается δ-функцией в (21,17), в которой $\omega+\mu$ играет роль начальной энергии квазичастицы $\varepsilon(\mathbf{p})$:

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}') + [\varepsilon(\mathbf{q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}') - \varepsilon(\mathbf{q})]$$

(здесь достаточно положить, в первом приближении, $\varepsilon(\mathbf{p}) = p^2/2m$). В соответствии с указанным смыслом, определенная этим равенством энергия $\varepsilon(\mathbf{p})$ действительно отвечает квазичастице вне ферми-сферы $(\varepsilon > \mu)$.

Аналогичным образом, второй член в фигурных скобках в (21,17) возникает от процессов, в которых пара рождается дыркой. Этот член дает затухание элементарных возбуждений с $\varepsilon < \mu$. На языке диаграммной техники возможность рождения пары квазичастицей выражается возможностью рассечь диаграмму G-функции на две части путем пересечения ее по трем сплошным линиям, из которых две направлены в одну, а третья — в другую сторону. На диаграммах (21,1 в — г) таковы сечения, проходящие между двумя пунктирами.

Случай слабо неидеального газа специфичен (по сравнению с общим случаем произвольной ферми-жидкости) в том отношении, что спектр квазичастиц в нем имеет смысл во всей области значений импульсов, а не только вблизи ферми-поверхности: затуханче квазичастиц ($\operatorname{Im}\varepsilon$) оказывается относительно малым уже благодаря малости «параметра газовости» ap_F. Мы приведем здесь, однако, окончательный результат вычислений лишь для двух предельных случаев.

Вблизи ферми-поверхности ($|p-p_F| \ll p_F$) получается

$$\operatorname{Re}\varepsilon = \mu + (p-p_F)\,p_F/m^*$$

с μ из (6,14) и m^* из (6,17). Для затухания же квазичастиц получается

$$\operatorname{Im}\varepsilon = -\frac{1}{\pi m}(p_F a)^2 (p-p_F)^2 \operatorname{sign}(p-p_F). \qquad (21,19)$$

Пропорциональность этого выражения квадрату $(p-p_F)^2$ имеет ясное происхождение: один множитель $p-p_F$ возникает как ширина той области импульсного пространства (узкий шаровой слой), в которую попадает импульс квазичастицы после рождения ею пары, а еще один такой множитель — как ширина слоя, в котором рождается пара. Отметим, кстати, что эти соображения относятся и к любой ферми-жидкости, так что вблизи ферми-поверхности всегда $\operatorname{Im}\varepsilon \propto (p-p_F)^2$ [1]).

При больших импульсах $p \gg p_F$ (но все же $pa \ll 1$) имеем

$$\varepsilon = \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{2p_F^2}{3\pi m} p_F a\right) - i\frac{p_F p}{3\pi m}(p_F a)^2. \qquad (21{,}20)$$

В обоих случаях отношение $\operatorname{Im}\varepsilon/\operatorname{Re}\varepsilon$ мало. Максимальное значение этого отношения достигается при $p \sim p_F$, но и здесь оно $\sim (p_F a)^2 \ll 1$.

Наконец, приведем значение перенормировочной постоянной функции Грина слабо неидеального газа. Она вычисляется как

$$\frac{1}{Z} = 1 - \left.\frac{\partial\Sigma(\omega, \mathbf{p})}{\partial\omega}\right|_{\omega=0,\, p=p_F}$$

и равна

$$Z = 1 - \frac{8\ln 2}{\pi^2}(p_F a)^2. \qquad (21{,}21)$$

[1]) При отличных от нуля температурах усреднение этой величины по тепловому распределению приводит к пропорциональности затухания квадрату T^2, о чем уже говорилось в § 1.