

СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ

§ 22. Элементарные возбуждения в квантовой бозе-жидкости

Обратимся теперь к изучению квантовых жидкостей с энергетическим спектром совершенно иного типа, который можно назвать *бозевским*¹⁾.

Этот спектр характеризуется тем, что элементарные возбуждения (отсутствующие в основном состоянии жидкости) могут появляться и исчезать поодиночке. Но момент импульса всякой квантовомеханической системы (в данном случае — жидкости) может испытывать изменения лишь на целое число. Поэтому возникающие поодиночке элементарные возбуждения должны обладать целочисленным моментом и, следовательно, подчиняться статистике Бозе. Спектром такого типа должна во всяком случае обладать всякая квантовая жидкость, состоящая из частиц с целым спином (таков жидкий изотоп He^4).

Напомним для сравнения, что в ферми-жидкости, при описании ее в терминах спектра элементарных возбуждений, отсутствующих в основном состоянии (см. конец § 1), эти возбуждения могут появляться или исчезать лишь парами. Именно с этим связана возможность элементарным возбуждениям в этом типе спектра иметь полужелый спин.

В квантовой бозе-жидкости элементарные возбуждения с малыми импульсами p (длина волны велика по сравнению с межатомными расстояниями) соответствуют обычным гидродинамическим звуковым волнам, т. е. представляют собой фононы. Это значит, что энергия таких квазичастиц является линейной функцией их импульса:

$$\epsilon = up, \quad (22,1)$$

где u — скорость звука в жидкости. Последняя дается обычной формулой $u^2 = \partial P / \partial \rho$, причем нет необходимости уточнять,

¹⁾ Теория таких квантовых жидкостей была создана Л. Д. Ландау в 1940—41 г., вслед за открытием П. Л. Капицей сверхтекучести жидкого гелия. Этими открытиями было положено начало всему развитию современной физики квантовых жидкостей.

берется ли производная при постоянной температуре T или энтропии S , поскольку при $T \rightarrow 0$ также и $S \rightarrow 0^1$).

Число элементарных возбуждений в бозе-жидкости стремится к нулю при $T \rightarrow 0$, и при низких температурах, когда их плотность достаточно мала, квазичастицы можно считать не взаимодействующими друг с другом, т. е. образующими идеальный бозе-газ. Поэтому статистически равновесное распределение элементарных возбуждений в бозе-жидкости дается формулой распределения Бозе (с равным нулю химическим потенциалом — ср. примечание на стр. 18)

$$n(p) = [e^{\varepsilon(p)/T} - 1]^{-1}. \quad (22,2)$$

С помощью этого распределения, и зная зависимость $\varepsilon(p)$ при малых p , можно вычислить термодинамические величины жидкости для таких близких к абсолютному нулю температур, при которых практически все имеющиеся в жидкости элементарные возбуждения обладают малыми энергиями, т. е. являются фононами. Соответствующие формулы можно написать сразу, воспользовавшись выражениями для термодинамических величин твердого тела при низких температурах (см. V § 64). Разница заключается лишь в том, что вместо трех возможных направлений поляризации звуковых волн в твердом теле (одно продольное и два поперечных) в жидкости существует лишь одно (продольное); поэтому все выражения для термодинамических величин следует разделить на 3. Так, для свободной энергии жидкости имеем

$$F = F_0 - V \frac{\pi^2 T^4}{90 (\hbar u)^3}, \quad (22,3)$$

где F_0 — свободная энергия при абсолютном нуле. Энергия жидкости равна

$$E = E_0 + V \frac{\pi^2 T^4}{30 (\hbar u)^3}, \quad (22,4)$$

а теплоемкость

$$C = V \frac{2\pi^2 T^3}{15 (\hbar u)^3}; \quad (22,5)$$

она пропорциональна кубу температуры.

Фононный закон дисперсии (22,1) справедлив лишь постольку, поскольку длина волны квазичастицы \hbar/p велика по сравнению

1) Понятие о фононах было введено в V §§ 71, 72 для элементарных возбуждений в твердых телах. Подчеркнем, что импульс элементарного возбуждения в микроскопически однородной системе — жидкости — есть истинный импульс, а не квазиимпульс, как в периодическом поле кристаллической решетки твердого тела.

с межатомными расстояниями. По мере увеличения импульса кривая $\varepsilon = \varepsilon(p)$, конечно, отклоняется от линейной зависимости; дальнейший ее ход зависит от конкретного закона взаимодействия молекул жидкости и не может быть поэтому определен в общем виде.

В жидком гелии закон дисперсии элементарных возбуждений имеет форму, изображенную на рис. 2: после начального линейного возрастания функция $\varepsilon(p)$ достигает максимума, затем

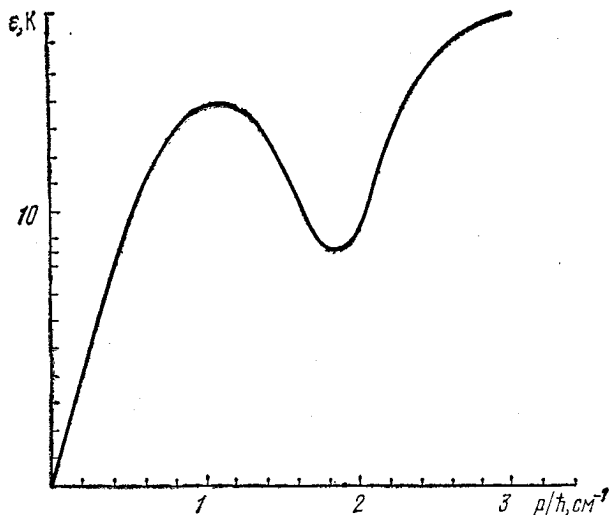


Рис. 2.

убывает и при определенном значении импульса p_0 проходит через минимум¹⁾. В тепловом равновесии большинство элементарных возбуждений в жидкости имеет энергии в областях вблизи минимумов функции $\varepsilon(p)$, т. е. в области малых ε (область вблизи $\varepsilon = 0$), и в области значения $\varepsilon(p_0)$. Поэтому именно эти области особенно существенны. Вблизи точки $p = p_0$ функция $\varepsilon(p)$ может быть разложена по степеням $p - p_0$. Линейный член в разложении отсутствует, и с точностью до членов второго порядка имеем

$$\varepsilon = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2m^*}, \quad (22,6)$$

¹⁾ Эта форма спектра была впервые предложена Л. Д. Ландау (1947) на основании анализа экспериментальных данных о термодинамических величинах жидкого гелия; в дальнейшем она была подтверждена экспериментально опытами по рассеянию нейтронов.

Качественная теория спектра такого типа дана Фейнманом (R. P. Feynman, 1954); см. ниже примечание на стр. 429.

где $\Delta = \varepsilon(p_0)$ и m^* — постоянные. Квазичастицы этого типа называют *ротонами*. Подчеркнем, однако, что оба типа квазичастиц — фононы и ротонны — отвечают лишь разным участкам одной и той же кривой, между которыми имеется непрерывный переход.

Эмпирические значения параметров энергетического спектра жидкого гелия (экстраполированные к нулевому давлению при плотности $\rho = 0,145$ г/см³) таковы¹⁾:

$$u = 2,4 \cdot 10^4 \text{ см/сек}, \quad \Delta = 8,7 \text{ К},$$

$$p_0/\hbar = 1,9 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}, \quad m^* = 0,16m \text{ (He}^4\text{)}. \quad (22,7)$$

Поскольку энергия ротона всегда содержит величину Δ , большую по сравнению с T — при температурах достаточно низких для того, чтобы можно было говорить о «ротонном газе», — то последний можно описывать вместо распределения Бозе распределением Больцмана. Соответственно этому, для вычисления ротонной части термодинамических величин жидкого гелия исходим из формулы для свободной энергии болъцмановского газа

$$F = -NT \ln \frac{eV}{N} \int e^{-\varepsilon/T} d\tau, \quad d\tau = \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}$$

(см. V § 41). При этом под N в этой формуле надо понимать число ротоннов в жидкости. Но это число само определяется условием термодинамического равновесия, т. е. условием минимальности свободной энергии. Приравняв $\partial F/\partial N$ нулю, найдем для числа ротоннов

$$N_p = V \int e^{-\varepsilon/T} d\tau \quad (22,8)$$

(что соответствует, естественно, болъцмановскому распределению с равным нулю химическим потенциалом). Соответствующее значение свободной энергии

$$F_p = -VT \int e^{-\varepsilon/T} d\tau.$$

В эти формулы надо подставить (22,6). Поскольку $p_0^2 \gg m^*T$, то при интегрировании по dp можно вынести множитель p^2 из-под знака интеграла, заменив его с достаточной точностью на p_0^2 . При интегрировании экспоненциального выражения можно распространить область интегрирования от $-\infty$ до ∞ . В результате получим

$$N_p = \frac{2(m^*T)^{1/2} p_0^2 V}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3} e^{-\Delta/T}, \quad F_p = -TN_p. \quad (22,9)$$

¹⁾ Укажем также значение химического потенциала жидкого гелия при $T=0$: $\mu = -7.16$ К.

Отсюда вклад ротоннов в энтропию и теплоемкость:

$$S_p = N_p \left(\frac{3}{2} + \frac{\Delta}{T} \right), \quad C_p = N_p \left(\frac{3}{4} + \frac{\Delta}{T} + \frac{\Delta^2}{T^2} \right). \quad (22,10)$$

Мы видим, что температурная зависимость ротонной части термодинамических величин в основном экспоненциальна. Поэтому при достаточно низких температурах (для жидкого гелия — ниже примерно чем 0,8 К) ротонная часть меньше фононной, а при более высоких температурах положение меняется, и ротонный вклад превосходит фононный.

§ 23. Сверхтекучесть

Квантовая жидкость с энергетическим спектром описанного типа обладает замечательным свойством так называемой *сверхтекучести* — свойством протекать по узким капиллярам или щелям, не обнаруживая вязкости. Начнем с рассмотрения жидкости при абсолютном нуле, когда она находится в своем нормальном, невозбужденном состоянии.

Рассмотрим жидкость, текущую по капилляру с постоянной скоростью v . Наличие вязкости проявилось бы в том, что благодаря трению о стенки трубки и трению внутри самой жидкости происходила бы диссипация кинетической энергии жидкости и постепенное замедление потока.

Нам будет удобнее рассматривать течение в системе координат, движущейся вместе с жидкостью. В этой системе гелий покоится, а стенки капилляра движутся со скоростью $-v$. При наличии вязкости покоящийся гелий тоже должен был бы начать двигаться. Физически очевидно, что увлечение жидкости стенками трубки не может привести с самого начала к движению жидкости как целого. Появление движения должно начаться с постепенного возбуждения внутренних движений, т. е. с появления в жидкости элементарных возбуждений.

Предположим, что в жидкости появляется одно элементарное возбуждение с импульсом p и энергией $\varepsilon(p)$. Тогда энергия E_0 жидкости (в системе координат, в которой она первоначально покоилась) делается равной энергии этого возбуждения ε , а ее импульс P_0 — импульсу p . Перейдем теперь обратно к системе координат, в которой покоится капилляр. Согласно известным из механики формулам преобразования энергии и импульса, имеем для энергии E и импульса P жидкости в этой системе

$$E = E_0 + P_0 v + \frac{M_0 v^2}{2}, \quad P = P_0 + Mv, \quad (23,1)$$