

Отсюда вклад ротоннов в энтропию и теплоемкость:

$$S_p = N_p \left(\frac{3}{2} + \frac{\Delta}{T} \right), \quad C_p = N_p \left(\frac{3}{4} + \frac{\Delta}{T} + \frac{\Delta^2}{T^2} \right). \quad (22,10)$$

Мы видим, что температурная зависимость ротонной части термодинамических величин в основном экспоненциальна. Поэтому при достаточно низких температурах (для жидкого гелия — ниже примерно чем 0,8 К) ротонная часть меньше фононной, а при более высоких температурах положение меняется, и ротонный вклад превосходит фононный.

§ 23. Сверхтекучесть

Квантовая жидкость с энергетическим спектром описанного типа обладает замечательным свойством так называемой *сверхтекучести* — свойством протекать по узким капиллярам или щелям, не обнаруживая вязкости. Начнем с рассмотрения жидкости при абсолютном нуле, когда она находится в своем нормальном, невозбужденном состоянии.

Рассмотрим жидкость, текущую по капилляру с постоянной скоростью v . Наличие вязкости проявилось бы в том, что благодаря трению о стенки трубки и трению внутри самой жидкости происходила бы диссипация кинетической энергии жидкости и постепенное замедление потока.

Нам будет удобнее рассматривать течение в системе координат, движущейся вместе с жидкостью. В этой системе гелий покоится, а стенки капилляра движутся со скоростью $-v$. При наличии вязкости покоящийся гелий тоже должен был бы начать двигаться. Физически очевидно, что увлечение жидкости стенками трубки не может привести с самого начала к движению жидкости как целого. Появление движения должно начаться с постепенного возбуждения внутренних движений, т. е. с появления в жидкости элементарных возбуждений.

Предположим, что в жидкости появляется одно элементарное возбуждение с импульсом p и энергией $\varepsilon(p)$. Тогда энергия E_0 жидкости (в системе координат, в которой она первоначально покоилась) делается равной энергии этого возбуждения ε , а ее импульс P_0 — импульсу p . Перейдем теперь обратно к системе координат, в которой покоится капилляр. Согласно известным из механики формулам преобразования энергии и импульса, имеем для энергии E и импульса P жидкости в этой системе

$$E = E_0 + P_0 v + \frac{Mv^2}{2}, \quad P = P_0 + Mv, \quad (23,1)$$

где M — масса жидкости. Подставив ε , p вместо E_0 , P_0 , напишем

$$E = \varepsilon + pv + \frac{Mv^2}{2}. \quad (23,2)$$

Член $Mv^2/2$ представляет собой первоначальную кинетическую энергию текущей жидкости; выражение же $\varepsilon + pv$ есть изменение энергии благодаря появлению возбуждения. Это изменение должно быть отрицательным, поскольку энергия движущейся жидкости должна уменьшаться

$$\varepsilon + pv < 0.$$

При заданном значении p величина, стоящая в левой стороне неравенства, имеет наименьшее значение при антипараллельных p и v ; поэтому во всяком случае должно быть $\varepsilon - pv < 0$, т. е.

$$v > \frac{\varepsilon}{p}. \quad (23,3)$$

Это неравенство должно выполняться хотя бы для некоторых значений импульса p элементарного возбуждения. Поэтому окончательное условие возможности появления возбуждений в движущейся по капилляру жидкости мы получим, найдя минимум величины ε/p . Геометрически отношение ε/p есть тангенс угла наклона прямой, проведенной из начала координат (в плоскости p , ε) в некоторую точку кривой $\varepsilon = \varepsilon(p)$. Его минимальное значение определится, очевидно, точкой, в которой проведенная из начала координат прямая касательна к кривой. Если это минимальное значение отлично от нуля, то при не слишком больших скоростях течения в жидкости не смогут появиться возбуждения. Это значит, что ее течение не будет замедляться, т. е. жидкость обнаружит явление сверхтекучести.

Полученное условие наличия сверхтекучести по существу сводится к требованию, чтобы кривая $\varepsilon = \varepsilon(p)$ не касалась оси абсцисс в самом начале координат (отвлекаясь от маловероятной возможности касания ею этой оси в дальнейшем своем ходе). Поэтому к сверхтекучести приведет по существу всякий спектр, в котором достаточно малые возбуждения являются фонами.

Рассмотрим теперь ту же жидкость при температуре, отличной от абсолютного нуля (хотя и близкую к нему). В этом случае жидкость не находится в основном состоянии — она содержит возбуждения. Приведенные выше рассуждения сами по себе остаются в силе, поскольку в них не было использовано непосредственно то обстоятельство, что жидкость находилась первоначально в основном состоянии. Движение жидкости относительно стенок трубки при выполнении указанного условия по-прежнему не сможет привести к появлению в ней новых эле-

ментарных возбуждений. Необходимо, однако, выяснить, каким образом будет проявляться наличие возбуждений, уже существующих в жидкости.

Представим себе для этого, что «газ квазичастиц» движется как целое относительно жидкости поступательно со скоростью v . Функция распределения для движущегося как целое газа получается из функции распределения $n(\epsilon)$ неподвижного газа путем замены энергии ϵ частицы величиной $\epsilon - \mathbf{p}v$, где \mathbf{p} — импульс частицы. Для обычного газа это обстоятельство является непосредственным следствием принципа относительности Галилея и доказывается просто путем перехода от одной системы координат к другой. В данном же случае такие соображения непосредственно не применимы, так как газ квазичастиц движется не в пустоте, а «сквозь жидкость». Тем не менее утверждение остается в силе, как это вытекает из следующих рассуждений.

Пусть газ возбуждений движется относительно жидкости со скоростью v . Рассмотрим систему координат, в которой газ как целое покоится, а жидкость соответственно движется со скоростью $-v$ (система K). Согласно формуле преобразования (23, 1), энергия E жидкости в системе K связана с энергией E_0 в системе, в которой жидкость покоится (система K_0), соотношением

$$E = E_0 - P_0 v + \frac{Mv^2}{2}.$$

Пусть в жидкости появляется элементарное возбуждение с энергией $\epsilon(p)$ (в системе K_0). Тогда дополнительная энергия жидкости в системе K будет $\epsilon - \mathbf{p}v$, чем и доказывается сделанное утверждение¹⁾.

Таким образом, полный импульс газа квазичастиц (отнесенный к единице объема) будет

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{p} n (\epsilon - \mathbf{p}v) d\tau.$$

Предположим, что скорость v мала, и разложим подынтегральное выражение по степеням $\mathbf{p}v$. Член нулевого порядка исчезает (при интегрировании по направлениям вектора \mathbf{p}), и остается

$$\mathbf{P} = - \int \mathbf{p} (\mathbf{p}v) \frac{dn(\epsilon)}{d\epsilon} d\tau,$$

или, после усреднения по направлениям \mathbf{p} ,

$$\mathbf{P} = \frac{v}{3} \int \left(- \frac{dn}{d\epsilon} \right) p^2 d\tau. \quad (23, 4)$$

¹⁾ Для квазичастиц в бозе-жидкости $n(\epsilon)$ — распределение (22, 2). Обратим внимание на то, что условие сверхтекучести ($v < \epsilon/p$) как раз совпадает с условием, обеспечивающим положительность и конечность выражения $n(\epsilon - \mathbf{p}v)$

Прежде всего мы видим, что движение газа квазичастиц сопровождается переносом некоторой массы: эффективная масса единицы объема газа определяется коэффициентом пропорциональности между импульсом P и скоростью v в (23,4). С другой стороны, при течении жидкости, скажем, по капилляру ничто не мешает квазичастицам сталкиваться со стенками трубки и обмениваться с ними импульсом. В результате газ возбуждений будет остановлен, как это произошло бы со всяким обычным газом, протекающим по капилляру.

Таким образом, мы приходим к следующему основному результату. При отличных от нуля температурах часть массы жидкости будет вести себя как нормальная вязкая жидкость, «цепляющаяся» при движении о стенки сосуда; остальная же часть массы будет вести себя как не обладающая вязкостью сверхтекучая жидкость. При этом весьма существенно, что между обеими этими движущимися «друг через друга» частями массы жидкости нет трения, т. е. не происходит передачи импульса от одной из них к другой. Действительно, само наличие такого взаимного движения одной части массы жидкости относительно другой мы получили при рассмотрении статистического равновесия в равномерно движущемся газе возбуждений. Но если какое-либо относительное движение может иметь место в состоянии теплового равновесия, то это значит, что оно не сопровождается трением.

Подчеркнем, что рассмотрение жидкости как «смеси» нормальной и сверхтекучей ее «частей» является не более, чем способом выражения, удобным для описания явлений, происходящих в квантовой жидкости; оно отнюдь не означает возможности реального разделения жидкости на две части. Как и всякое описание квантовых явлений в классических терминах, оно не является вполне адекватным. В действительности надо говорить, что в квантовой бозе-жидкости могут существовать одновременно два движения, каждое из которых связано со своей эффективной массой (так что сумма этих масс равна полной истинной массе жидкости). Одно из этих движений «нормально», т. е. обладает теми же свойствами, что и движение обычной вязкой жидкости; другое же — «сверхтекучее». Оба эти движения происходят без передачи импульса от одного к другому.

Таким образом, в гидродинамическом смысле плотность бозе-жидкости может быть представлена в виде суммы $\rho = \rho_n + \rho_s$, нормальной и сверхтекучей частей, каждая из которых связана со своей гидродинамической скоростью — v_n и v_s . Важным свойством сверхтекучего движения является его потенциальность:

$$\text{rot } v_s = 0.$$

(23,5)

Это свойство является макроскопическим выражением того факта, что элементарные возбуждения с большой длиной волны (т. е. с малыми импульсами) являются звуковыми квантами — фононами. Поэтому макроскопическая гидродинамика сверхтекучего движения не должна допускать никаких других колебаний, кроме звуковых¹⁾, что и обеспечивается условием (23,5) (мы еще вернемся к его обоснованию в § 26)²⁾.

При $T=0$ нормальная часть плотности $\rho_n=0$; жидкость может совершать только сверхтекучее движение. При отличных же от нуля температурах ρ_n дается формулой (23,4):

$$\rho_n = \frac{1}{3} \int \left(-\frac{dn}{d\varepsilon} \right) p^2 d\tau. \quad (23,6)$$

Для вычисления фононного вклада в ρ_n полагаем в (23,6) $\varepsilon = u\rho$:

$$(\rho_n)_\Phi = -\frac{1}{3u} \int_0^\infty \frac{dn}{dp} p^2 \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}$$

и после интегрирования по частям находим

$$(\rho_n)_\Phi = \frac{4}{3u} \int_0^\infty n p \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{4}{3u^2} \int \varepsilon n d\tau.$$

Оставшийся здесь интеграл есть не что иное, как энергия единицы объема фононного газа; взяв эту величину из (22,4), получим окончательно

$$(\rho_n)_\Phi = \frac{4E_\Phi}{3u^2V} = \frac{2\pi^2 T^4}{45\hbar^3 u^5}. \quad (23,7)$$

Для вычисления же ротонного вклада в ρ_n замечаем, что поскольку ротоны можно описывать распределением Больцмана, то для них $dn/d\varepsilon = -n/T$, и из (23,6) имеем

$$(\rho_n)_p = \frac{1}{3T} \int p^2 n d\tau = \frac{\bar{p}^2}{3T} \frac{N_p}{V}.$$

Положив, с достаточной точностью, $\bar{p}^2 = p_0^2$ и взяв N_p из (22,9), получим

$$(\rho_n)_p = \frac{\rho_0^2 N_p}{3TV} = \frac{2(m^*)^{1/2} \rho_0^4}{3(2\pi)^{3/2} T^{1/2} \hbar^3} e^{-\Delta/T}. \quad (23,8)$$

¹⁾ Подразумевается, что жидкость не ограничена. При наличии свободной поверхности возможны также поверхностные капиллярные волны (что приводит к определенной температурной зависимости поверхностного натяжения — см. задачу 1).

²⁾ Подробное изложение гидродинамики сверхтекучей жидкости дается в другом томе этого Курса (том VI).

При самых низких температурах фононный вклад в ρ_n велик по сравнению с ротонным. Они сравниваются примерно при 0,6К, а при больших температурах ротонный вклад становится преобладающим.

По мере повышения температуры все большая часть массы жидкости становится нормальной. В точке, в которой достигается равенство $\rho_n = \rho$, полностью исчезает свойство сверхтекучести. Это — так называемая λ -точка жидкости, представляющая собой точку фазового перехода второго рода¹⁾. Что касается количественных формул (23,7—8), то они, конечно, неприменимы вблизи λ -точки, где концентрация квазичастиц становится большой, так что даже самое понятие о них в значительной степени теряет смысл.

Остановимся еще на вопросе о поведении атомов растворенных в жидком гелии посторонних веществ; концентрация примеси предполагается настолько малой, что ее атомы можно считать невзаимодействующими друг с другом (*Л. Д. Ландау, И. Я. Померанчук, 1948*).

Наличие постороннего атома в жидкости приводит к появлению новой ветви энергетического спектра, соответствующей движению этого атома через жидкость; разумеется, ввиду сильного взаимодействия атома примеси с атомами жидкости, это движение является в действительности коллективным эффектом, в котором принимают участие также и атомы жидкости. Этому движению можно приписать некоторый результирующий сохраняющийся импульс p . Таким образом, в жидкости появляются квазичастицы нового типа (в числе, равном числу атомов примеси), энергия которых $\epsilon_{пр}(p)$ является определенной функцией импульса. В тепловом равновесии энергии этих квазичастиц будут сосредоточены вблизи наименьшего из минимумов функции $\epsilon_{пр}(p)$. Фактически речь идет о примеси изотопа He^3 , и эмпирические данные показывают, что такой минимум лежит при $p = 0$; вблизи него энергия квазичастицы имеет вид

$$\epsilon_{пр}(p) = \frac{p^2}{2m_{пр}^*} \quad (23,9)$$

с эффективной массой $m_{пр}^* = 2,8$ масс атома He^3 .

Примесные квазичастицы взаимодействуют с фононами и ротонами, сталкиваясь с ними, и, таким образом, входят в состав нормальной части жидкости. Ввиду малой концентрации этих квазичастиц их тепловое распределение — бoльцмановское, и их

¹⁾ Жидкий гелий при температурах ниже этой точки называют гелием II. λ -точки образуют линию на фазовой диаграмме в плоскости P, T . Эта линия пересекает линию равновесия жидкости с паром при температуре 2,19 К.

вклад в ρ_n (определенный согласно (23,6)) дается формулой

$$(\rho_n)_{\text{пр}} = \frac{N_{\text{пр}} \bar{\rho}^2}{V 3T} = \frac{N_{\text{пр}}}{V} m_{\text{пр}}^*, \quad (23,10)$$

где $N_{\text{пр}}/V$ — число атомов примеси в единице объема.

Задачи

1. Найти предельный закон температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения α жидкого гелия вблизи абсолютного нуля (К. R. Atkins, 1953).

Решение. Коэффициент α есть свободная энергия единицы площади поверхности жидкости (см. V (154,6)). Эта величина вычисляется по формуле V (64,1), в которой частоты ω_α относятся теперь к поверхностным колебаниям. В двумерном случае переход от суммирования к интегрированию (по волновым векторам колебаний) осуществляется введением множителя $d^2k/(2\pi)^2$ или $2\pi k dk/(2\pi)^2$. После интегрирования по частям найдем

$$\alpha = \alpha_0 + T \int \ln(1 - e^{-\hbar\omega/T}) \frac{k dk}{2\pi} = \alpha_0 - \frac{\hbar}{4\pi} \int \frac{k^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1}$$

(α_0 — поверхностное натяжение при $T=0$). При достаточно низких температурах существенны лишь колебания с малыми частотами, т. е. с большими длинами волн. Такие колебания представляют собой гидродинамические капиллярные волны, для которых $\omega^2 = \alpha k^3/\rho \approx \alpha_0 k^3/\rho$ (ρ — плотность жидкости). Поэтому

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{\hbar}{4\pi} \left(\frac{\rho}{\alpha_0}\right)^{2/3} \int_0^\infty \frac{\omega^{4/3} d\omega}{e^{\hbar\omega/T} - 1}$$

(быстрая сходимость интеграла позволяет заменить верхний предел бесконечностью). Вычисление интеграла (см. примечание в V § 58) приводит к результату

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{T^{7/3} \rho^{2/3}}{4\pi \hbar^{4/3} \alpha_0^{2/3}} \Gamma\left(\frac{7}{3}\right) \zeta\left(\frac{7}{3}\right) = \alpha_0 - 0,13 \frac{T^{7/3} \rho^{2/3}}{\hbar^{4/3} \alpha_0^{2/3}}.$$

Этот результат относится к жидкому He^4 при температурах настолько низких, что всю массу жидкости можно считать сверхтекучей¹⁾.

2. Найти закон дисперсии $\epsilon_{\text{пр}}(\mathbf{p})$ для примесных частиц в движущейся сверхтекучей жидкости, если известен этот закон $\epsilon_{\text{пр}}^{(0)}(\mathbf{p})$ в неподвижной жидкости (J. Bardeen, G. Baym, D. Pines, 1967).

Решение. После добавления к неподвижной жидкости (при $T=0$) атома примеси (с массой m) с импульсом \mathbf{p}_0 ее энергия и импульс (в системе координат, в которой жидкость первоначально покоилась) есть $E_0 = \epsilon_{\text{пр}}^{(0)}(\mathbf{p}_0)$, $\mathbf{P}_0 = \mathbf{p}_0$. В системе же координат, в которой жидкость движется со скоростью \mathbf{v} , имеем, согласно (23,1),

$$E = \epsilon_{\text{пр}}^{(0)}(\mathbf{p}_0) + \mathbf{p}_0 \mathbf{v} + \frac{1}{2} (M + m) v^2, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p}_0 + (M + m) \mathbf{v}.$$

¹⁾ В ферми-жидкости (жидкий He^3) капиллярные волны рассмотренного типа (как и объемные волны обычного звука) не существуют ввиду неограниченного возрастания вязкости при $T \rightarrow 0$.

Отсюда видно, что изменения энергии и импульса движущейся жидкости при добавлении к ней атома примеси равны

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \varepsilon_{\text{пр}}^{(0)}(\rho_0) + \rho_0 v + \frac{mv^2}{2}, \quad \mathbf{p} = \rho_0 + mv.$$

Выразив $\varepsilon_{\text{пр}}$ через \mathbf{p} , находим

$$\varepsilon_{\text{пр}}(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\text{пр}}^{(0)}(\mathbf{p} - m\mathbf{v}) + \mathbf{p}\mathbf{v} - \frac{mv^2}{2}.$$

При малых значениях v , с точностью до членов первого порядка, для спектра $\varepsilon_{\text{пр}}^{(0)}(\rho)$ вида (23,9) имеем

$$\varepsilon_{\text{пр}}(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m_{\text{пр}}^*} + \mathbf{v}\mathbf{p} \left(1 - \frac{m}{m_{\text{пр}}^*}\right).$$

§ 24. Фононы в жидкости

При переходе от классической картины звуковых волн к квантовому представлению о фононах гидродинамические величины (плотность, скорость жидкости и т. п.) заменяются операторами, выражающимися через операторы \hat{c}_k , \hat{c}_k^+ уничтожения и рождения фононов. Выведем формулы, дающие эти выражения.

Напомним, что в классическом описании звуковой волны плотность жидкости испытывает малые колебания с частотами и волновыми векторами, связанными друг с другом соотношением $\omega = uk$. Величиной того же порядка малости, что и переменная часть плотности $\rho' = \rho - \rho_0$ (ρ_0 — равновесное значение плотности), является скорость жидкости \mathbf{v} . Движение жидкости в волне потенциально, т. е. может быть описано скалярным потенциалом скорости φ , определяющим скорость согласно

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi. \quad (24,1)$$

Скорость и плотность связаны друг с другом уравнением непрерывности $\partial\rho'/\partial t = -\text{div}(\rho\mathbf{v}) \approx -\rho_0 \text{div} \mathbf{v}$, или

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} = -\rho_0\Delta\varphi. \quad (24,2)$$

Энергия жидкости в звуковой волне дается интегралом

$$E = \int \left(\frac{\rho_0 v^2}{2} + \frac{u^2 \rho'^2}{2\rho_0} \right) d^3x. \quad (24,3)$$

Первый член в подынтегральном выражении есть плотность кинетической, а второй — внутренней энергии жидкости; оба квадратичны по малым величинам \mathbf{v} и ρ' .

Дальнейшую процедуру квантования можно было бы провести полностью аналогично тому, как это было сделано для фононов в твердых кристаллах (см. V § 72). Мы, однако, избежим здесь несколько иной путь, демонстрирующий некоторые поучительные методические моменты. Рассмотрим сначала опе-