Отсюда видно, что изменения энергии и импульса движущейся жидкости при добавлении к ней атома примеси равны

$$\varepsilon_{\text{пр}} = \varepsilon_{\text{пр}}^{(0)}(p_0) + \mathbf{p}_0\mathbf{v} + \frac{mv^2}{2}, \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + m\mathbf{v}.$$

Выразив $\varepsilon_{\text{пр}}$ через $\mathbf{p}$, находим

$$\varepsilon_{\text{пр}}(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\text{пр}}^{(0)}(\mathbf{p} - m\mathbf{v}) + \mathbf{p}\mathbf{v} - \frac{mv^2}{2}.$$

При малых значениях v, с точностью до членов первого порядка, для спектра $\varepsilon_{\text{пр}}^{(0)}(p)$ вида (23,9) имеем

$$\varepsilon_{\text{пр}}(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m_{\text{пр}}^*} + \mathbf{v}\mathbf{p}\left(1 - \frac{m}{m_{\text{пр}}^*}\right).$$

§ 24. Фононы в жидкости

При переходе от классической картины звуковых волн к квантовому представлению о фононах гидродинамические величины (плотность, скорость жидкости и т. п.) заменяются операторами, выражающимися через операторы $\hat{c}_{\mathbf{k}}$, $\hat{c}_{\mathbf{k}}^+$ уничтожения и рождения фононов. Выведем формулы, дающие эти выражения.

Напомним, что в классическом описании звуковой волны плотность жидкости испытывает малые колебания с частотами и волновыми векторами, связанными друг с другом соотношением $\omega = uk$. Величиной того же порядка малости, что и переменная часть плотности $\rho' = \rho - \rho_0$ (ρ_0 — равновесное значение плотности), является скорость жидкости $\mathbf{v}$. Движение жидкости в волне потенциально, т. е. может быть описано скалярным потенциалом скорости φ, определяющим скорость согласно

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi. \tag{24,1}$$

Скорость и плотность связаны друг с другом уравнением непрерывности $\partial\rho'/\partial t = -\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) \approx -\rho_0 \operatorname{div}\mathbf{v}$, или

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} = -\rho_0\Delta\varphi. \tag{24,2}$$

Энергия жидкости в звуковой волне дается интегралом

$$E = \int\left(\frac{\rho_0\mathbf{v}^2}{2} + \frac{u^2\rho'^2}{2\rho_0}\right)d^3x. \tag{24,3}$$

Первый член в подынтегральном выражении есть плотность кинетической, а второй — внутренней энергии жидкости; оба квадратичны по малым величинам $\mathbf{v}$ и ρ'.

Дальнейшую процедуру квантования можно было бы провести полностью аналогично тому, как это было сделано для фононов в твердых кристаллах (см. V § 72). Мы, однако, изберем здесь несколько иной путь, демонстрирующий некоторые поучительные методические моменты. Рассмотрим сначала операторы плотности и скорости жидкости, выраженные через микроскопические переменные — координаты частиц.

В классической теории плотность ρ и плотность потока массы жидкости $\mathbf{j}$ могут быть представлены суммами

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a m_a \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}), \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_a \mathbf{p}_a \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}),$$

взятыми по всем частицам ($\mathbf{r}_a$ и $\mathbf{p}_a$ — радиус-векторы и импульсы частиц); интегралы от этих функций по какому-либо объему дают полную массу и полный импульс жидкости в этом объеме. При переходе к квантовой теории эти функции заменяются соответствующими операторами. Оператор плотности имеет тот же вид

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_a m_a \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}), \tag{24,4}$$

а оператор плотности потока

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_a \{\hat{\mathbf{p}}_a \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}) \hat{\mathbf{p}}_a\}, \tag{24,5}$$

где $\hat{\mathbf{p}}_a = -i\hbar\nabla_a$ — оператор импульса частицы[1]).

Найдем правило коммутации между операторами $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ и $\hat{\rho}(\mathbf{r}')$, взятыми в точках $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$; при этом можно, для краткости, рассматривать всего по одному члену в суммах (24,4—5), поскольку операторы, соответствующие разным частицам, коммутативны. При раскрытии коммутатора операторы вида $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \nabla_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}')$ преобразуются следующим образом:

$$\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \nabla_1 \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) (\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) + \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}') \nabla_1,$$

где в первом члене $(\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$ означает просто градиент δ-функции; ввиду наличия множителя $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$ в этом члене можно писать в нем $(\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'))$ вместо $(\nabla_1\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'))$. В результате получим

$$\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r})\hat{\rho}(\mathbf{r}') - \hat{\rho}(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) = -i\hbar\hat{\rho}(\nabla\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')). \tag{24,6}$$

Введем теперь вместо $\hat{\mathbf{j}}$ оператор скорости жидкости $\hat{\mathbf{v}}$, согласно определению,

$$\hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{2}(\hat{\rho}\hat{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{v}}\hat{\rho}).$$

---

[1]) Пусть, для простоты, система состоит всего из одной частицы. Усреднение оператора $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = m\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$ по состоянию с волновой функцией $\psi(\mathbf{r}_1)$ дает $\int \psi^*(\mathbf{r}_1)\, \hat{\rho}\psi(\mathbf{r}_1)\, d^3x_1 = m|\psi(\mathbf{r})|^2$, как и должно быть. Аналогичным образом, усреднение оператора $\hat{\mathbf{j}}(\mathbf{r})$ дает правильное выражение плотности потока

$$(\hbar/2i)\{\psi^*(\mathbf{r})\nabla\psi(\mathbf{r}) - \psi(\mathbf{r})\nabla\psi^*(\mathbf{r})\}.$$

Правило коммутации операторов $\hat{\rho}$ и $\hat{\mathbf{v}}$ определяется требованием, чтобы для коммутатора $\hat{\rho}$ и $\hat{\mathbf{j}}$ получалось выражение (24,6). Легко проверить, что для этого надо положить

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})\hat{\rho}(\mathbf{r}')-\hat{\rho}(\mathbf{r}')\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})=-i\hbar(\nabla\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'))$$

(при этом надо учесть очевидную коммутативность операторов $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ и $\hat{\rho}(\mathbf{r}')$). Наконец, положив $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r})=\nabla\hat{\varphi}(\mathbf{r})$, получаем правило коммутациии между операторами плотности и потенциала скорости

$$\hat{\varphi}(\mathbf{r})\hat{\rho}'(\mathbf{r}')-\hat{\rho}'(\mathbf{r}')\hat{\varphi}(\mathbf{r})=-i\hbar\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \qquad (24,7)$$

(вместо $\hat{\rho}$ можно, конечно, писать здесь оператор $\hat{\rho}'=\hat{\rho}-\rho_0$ переменной части плотности). Правило (24,7) аналогично правилу коммутации между координатой и импульсом частицы; в этом смысле величины ρ' и φ играют в данном случае роль канонически сопряженных обобщенных «координат» и «импульсов».

Использовав выражения (24,4—5) для установления правила (24,7), напишем теперь операторы $\hat{\varphi}$ и $\hat{\rho}'$ в представлении вторичного квантования (т. е. выразим их через операторы уничтожения и рождения фононов), потребовав при этом, чтобы они удовлетворяли правилу (24,7). Для этого пишем

$$\hat{\varphi}(\mathbf{r})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}\left(A_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}}e^{i\mathbf{kr}}+A_{\mathbf{k}}^{*}\hat{c}_{\mathbf{k}}^{+}e^{-i\mathbf{kr}}\right)$$

с пока не определенными коэффициентами $A_{\mathbf{k}}$; суммирование производится по всем значениям волнового вектора, пробегаемым для жидкости в большом, но конечном объеме V[1]. Операторы $\hat{c}_{\mathbf{k}}$, $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{+}$ удовлетворяют бозевским правилам коммутации

$$\hat{c}_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}'}^{+}-\hat{c}_{\mathbf{k}'}^{+}\hat{c}_{\mathbf{k}}=\delta_{\mathbf{kk}'}. \qquad (24,8)$$

Напомним для дальнейших ссылок, что отличные от нуля матричные элементы этих операторов

$$\langle n_{\mathbf{k}}-1|\hat{c}_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle=\langle n_{\mathbf{k}}|\hat{c}_{\mathbf{k}}^{+}|n_{\mathbf{k}}-1\rangle=\sqrt{n_{\mathbf{k}}}, \qquad (24,9)$$

где $n_{\mathbf{k}}$ — числа заполнения фононных состояний.

В дальнейшем нам понадобится, однако, не шредингеровский оператор $\hat{\varphi}(\mathbf{r})$, а гейзенберговский $\hat{\varphi}(t,\mathbf{r})$. Он получается из $\hat{\varphi}(\mathbf{r})$ просто путем введения множителей $\exp(\pm i\omega t)$ с частотами

[1]) В отличие от ψ-операторов частиц, оператор вещественной величины φ эрмитов и содержит одновременно операторы рождения и уничтожения фононов. Напомним, что это свойство (как и такое же свойство операторов поля в квантовой электродинамике) связано с несохранением числа «частиц» в фононном поле.

$\omega = uk$ в каждый член суммы

$$\hat{\varphi}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left(A_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr} - kut)} + A_{\mathbf{k}}^* \hat{c}_{\mathbf{k}}^+ e^{-i(\mathbf{kr} - kut)} \right)$$

(ср. сказанное по этому поводу для ψ-операторов в начале § 9). Оператор же плотности $\hat{\rho}'(t, \mathbf{r})$ должен быть связан с оператором $\hat{\varphi}(t, \mathbf{r})$ соотношением (24,2) и поэтому дается такой же суммой с множителями $iA_{\mathbf{k}}\rho_0 k/u$ вместо $A_{\mathbf{k}}$. После этого множители $A_{\mathbf{k}}$ надо определить так, чтобы выполнилось правило коммутации (24,7). В результате получаются следующие окончательные выражения:

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(t, \mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar u}{2V\rho_0 k} \right)^{1/2} \left(\hat{c}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr} - ukt)} + \hat{c}_{\mathbf{k}}^+ e^{-i(\mathbf{kr} - ukt)} \right), \\ \hat{\rho}'(t, \mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}} i \left(\frac{\rho_0 \hbar k}{2Vu} \right)^{1/2} \left(\hat{c}_{\mathbf{k}} e^{i(\mathbf{kr} - ukt)} - \hat{c}_{\mathbf{k}}^+ e^{-i(\mathbf{kr} - ukt)} \right). \end{aligned} \tag{24,10}$$

Действительно, подставив эти выражения в левую часть правила (24,7), с учетом (24,8) получим требуемую δ-функцию:

$$-i\hbar \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \left(\hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}}^+ - \hat{c}_{\mathbf{k}}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}} \right) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} =$$
$$= -\frac{i\hbar}{V} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \to -\frac{i\hbar}{V} \int e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{V d^3k}{(2\pi)^3} = -i\hbar\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}').$$

Легко убедиться также, что гамильтониан жидкости, получающийся подстановкой $\hat{\mathbf{v}} = \nabla\hat{\varphi}$ и $\hat{\rho}'$ вместо $\mathbf{v}$ и ρ' в интеграл (24,3), имеет, как и следовало, вид

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} u\hbar k \left(\hat{c}_{\mathbf{k}}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right);$$

его собственные значения равны $\Sigma u\hbar k (n_{\mathbf{k}} + 1/2)$ в соответствии с представлением о фононах с энергиями $\varepsilon = u\hbar k$.

Выражение (24,3) для энергии жидкости в звуковой волне представляет собой первые (после нулевого) члены разложения точного выражения

$$E = \int \left[\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \rho e(\rho) \right] d^3x$$

(где $e(\rho)$ — внутренняя энергия единицы массы жидкости). Роль точного гамильтониана жидкости играет этот интеграл, в котором $\mathbf{v}$ и ρ заменены операторами $\hat{\mathbf{v}} = \nabla\hat{\varphi}$ и $\hat{\rho} = \rho_0 + \hat{\rho}'$ с $\hat{\varphi}$ и $\hat{\rho}'$ из (24,10):

$$\hat{H} = \int \left[\frac{\hat{\mathbf{v}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{v}}}{2} + \hat{\rho} e(\hat{\rho}) \right] d^3x \tag{24,11}$$

(оператор кинетической энергии написан в симметризованном виде $\hat{\mathbf{v}}\hat{\rho}\hat{\mathbf{v}}/2$, чтобы быть эрмитовым). При этом существенно, что именно ρ и φ являются канонически сопряженными «обобщенными координатами и импульсами», через которые должен быть выражен гамильтониан. Это видно из того, что правило коммутации (24,7), которому удовлетворяют операторы (24,10), является точным — в его выводе малость колебаний нигде не использовалась.

Члены более высоких (третьей и т. д.) степеней в разложении этого гамильтониана выражают собой ангармоничность звуковых колебаний, а в терминах фононной картины — описывают взаимодействие фононов. Эти члены имеют матричные элементы для переходов с одновременным изменением нескольких чисел заполнения фононов и тем самым играют роль возмущения, вызывающего различные процессы рассеяния и распада фононов. При этом матричные элементы самих операторов $\hat{c}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{+}$ имеют, разумеется, прежний вид (24,9), поскольку (как это всегда делается в теории возмущений) используется представление, в котором диагонален невозмущенный гамильтониан. Приведем здесь выражения членов третьего и четвертого порядков

$$\hat{H}^{(3)}=\int\left[\frac{\hat{\mathbf{v}}\hat{\rho}'\hat{\mathbf{v}}}{2}+\left(\frac{d}{d\rho_0}\frac{u^2}{\rho_0}\right)\frac{\hat{\rho}'^3}{6}\right]d^3x, \qquad (24,12)$$

$$\hat{H}^{(4)}=\frac{1}{24}\left(\frac{d^2}{d\rho_0^2}\frac{u^2}{\rho_0}\right)\int\hat{\rho}'^4\,d^3x. \qquad (24,13)$$

§ 25. Вырожденный почти идеальный бозе-газ

Основные свойства энергетического спектра бозевского типа ясно видны на модели слабо неидеального бозе-газа при близких к нулю температурах. Эта модель будет рассмотрена в этом параграфе аналогично тому, как это было сделано в § 6 для ферми-газа [1]). Все сказанное в § 6 в связи с общей характеристикой моделей вырожденного почти идеального газа относится и к настоящему случаю. В частности, условие слабой неидеальности (газовый параметр $a(N/V)^{1/3}\ll 1$; a — длина рассеяния) может быть по-прежнему сформулировано в виде условия (6,1) малости импульсов частиц: $pa/\hbar\ll 1$ [2]).

[1]) Излагаемый ниже метод принадлежит *Н. Н. Боголюбову* (1947). Применение им этого метода к бозе-газу явилось первым примером последовательного микроскопического вывода энергетического спектра «квантовых жидкостей».

[2]) Мы увидим ниже, что в вырожденном бозе-газе основная масса частиц (вне «конденсата») обладает импульсами $p\sim\hbar\sqrt{aN/V}$, для которых указанное неравенство действительно справедливо.