(оператор кинетической энергии написан в симметризованном виде $\hat{\mathbf{v}}\rho\hat{\mathbf{v}}/2$, чтобы быть эрмитовым). При этом существенно, что именно ρ и φ являются канонически сопряженными «обобщенными координатами и импульсами», через которые должен быть выражен гамильтониан. Это видно из того, что правило коммутации (24,7), которому удовлетворяют операторы (24,10), является точным — в его выводе малость колебаний нигде не использовалась.

Члены более высоких (третьей и т. д.) степеней в разложении этого гамильтониана выражают собой ангармоничность звуковых колебаний, а в терминах фононной картины — описывают взаимодействие фононов. Эти члены имеют матричные элементы для переходов с одновременным изменением нескольких чисел заполнения фононов и тем самым играют роль возмущения, вызывающего различные процессы рассеяния и распада фононов. При этом матричные элементы самих операторов $\hat{c}_{\mathbf{k}}$ и $\hat{c}_{\mathbf{k}}^{+}$ имеют, разумеется, прежний вид (24,9), поскольку (как это всегда делается в теории возмущений) используется представление, в котором диагонален невозмущенный гамильтониан. Приведем здесь выражения членов третьего и четвертого порядков

$$\hat{H}^{(3)}=\int\left[\frac{\hat{\mathbf{v}}\hat{\rho}'\hat{\mathbf{v}}}{2}+\left(\frac{d}{d\rho_0}\frac{u^2}{\rho_0}\right)\frac{\hat{\rho}'^3}{6}\right]d^3x, \qquad (24,12)$$

$$\hat{H}^{(4)}=\frac{1}{24}\left(\frac{d^2}{d\rho_0^2}\frac{u^2}{\rho_0}\right)\int\hat{\rho}'^4\,d^3x. \qquad (24,13)$$

§ 25. Вырожденный почти идеальный бозе-газ

Основные свойства энергетического спектра бозевского типа ясно видны на модели слабо неидеального бозе-газа при близких к нулю температурах. Эта модель будет рассмотрена в этом параграфе аналогично тому, как это было сделано в § 6 для ферми-газа[1]). Все сказанное в § 6 в связи с общей характеристикой моделей вырожденного почти идеального газа относится и к настоящему случаю. В частности, условие слабой неидеальности (газовый параметр $a(N/V)^{1/3}\ll 1$; a — длина рассеяния) может быть по-прежнему сформулировано в виде условия (6,1) малости импульсов частиц: $pa/\hbar \ll 1$ [2]).

[1]) Излагаемый ниже метод принадлежит *Н. Н. Боголюбову* (1947). Применение им этого метода к бозе-газу явилось первым примером последовательного микроскопического вывода энергетического спектра «квантовых жидкостей».

[2]) Мы увидим ниже, что в вырожденном бозе-газе основная масса частиц (вне «конденсата») обладает импульсами $p\sim\hbar\sqrt{aN/V}$, для которых указанное неравенство действительно справедливо.

Гамильтониан системы парно взаимодействующих бозонов (которые мы будем предполагать бесспиновыми) имеет вид, отличающийся от (6,6) лишь отсутствием спиновых индексов:

$$\hat{H} = \sum \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2} \sum \langle \mathbf{p}_1' \mathbf{p}_2' | U | \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \rangle \hat{a}_{\mathbf{p}_1'}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2'}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1} \qquad (25,1)$$

(суммирование по всем импульсам, фигурирующим в индексах). Операторы же уничтожения и рождения частиц удовлетворяют теперь правилам коммутации

$$\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ - \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} = 1.$$

Как и в § 6, снова заменяем, в соответствии с предположением о малости импульсов, все матричные элементы в (25,1) их значением при нулевых импульсах; тогда

$$\hat{H} = \sum \frac{p^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}} + \frac{U_0}{2V} \sum \hat{a}_{\mathbf{p}_1'}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2'}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}_2} \hat{a}_{\mathbf{p}_1}. \qquad (25,2)$$

Исходным пунктом применения теории возмущений к этому гамильтониану является следующее замечание. В основном состоянии идеального бозе-газа все частицы находятся в *конденсате*—состоянии нулевой энергии; числа заполнения $N_{\mathbf{p}=0} \equiv N_0 = N$, $N_{\mathbf{p}} = 0$ при $\mathbf{p} \neq 0$ (см. V § 62). В почти идеальном же газе в основном и в слабо возбужденных состояниях числа $N_{\mathbf{p}}$ отличны от нуля, но очень малы по сравнению с макроскопически большим числом N_0. Тот факт, что величина $\hat{a}_0^+ \hat{a}_0 = N_0 \approx N$ весьма велика по сравнению с единицей, означает, что выражение

$$\hat{a}_0 \hat{a}_0^+ - \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 = 1$$

мало по сравнению с самими $\hat{a}_0$, $\hat{a}_0^+$, и потому можно рассматривать последние как обычные (равные $\sqrt{N_0}$) числа, пренебрегая их некоммутативностью.

Применение теории возмущений означает теперь формально разложение четверной суммы в (25,2) по степеням малых величин $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}_{\mathbf{p}}^+$ $(\mathbf{p} \neq 0)$. Нулевой член разложения равен

$$\hat{a}_0^+ \hat{a}_0^+ \hat{a}_0 \hat{a}_0 = a_0^4. \qquad (25,3)$$

Члены первого порядка отсутствуют (ввиду невозможности соблюдения в них закона сохранения импульса). Члены второго порядка

$$a_0^2 \sum_{\mathbf{p} \neq 0} (\hat{a}_{\mathbf{p}} \hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{-\mathbf{p}}^+ + 4 \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \hat{a}_{\mathbf{p}}). \qquad (25,4)$$

Ограничиваясь точностью до величин второго порядка, можно заменить в (25,4) $a_0^2 = N_0$ на полное число частиц N. В члене же

(25,3) следует учесть более точное соотношение

$$a_0^2 + \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \hat{a}_\mathbf{p}^+ \hat{a}_\mathbf{p} = N.$$

В результате сумма членов (25,3—4) становится равной

$$N^2 + N \sum_{\mathbf{p}\neq 0} (\hat{a}_\mathbf{p}\hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}_\mathbf{p}^+\hat{a}_{-\mathbf{p}}^+ + 2\hat{a}_\mathbf{p}^+\hat{a}_\mathbf{p}),$$

и после подстановки в (25,2) получаем следующее выражение для гамильтониана:

$$\hat{H} = \frac{N^2}{2V} U_0 + \sum_\mathbf{p} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_\mathbf{p}^+ \hat{a}_\mathbf{p} + \frac{N}{2V} U_0 \sum_{\mathbf{p}\neq 0} (\hat{a}_\mathbf{p}\hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}_\mathbf{p}^+\hat{a}_{-\mathbf{p}}^+ + 2\hat{a}_\mathbf{p}^+\hat{a}_\mathbf{p}). \quad (25,5)$$

Первый член этого выражения определяет, в первом приближении, энергию E_0 основного состояния газа, а его производная по N — соответственно химический потенциал μ при $T=0$:

$$E_0 = \frac{N^2}{2V} U_0, \quad \mu = \frac{N}{V} U_0. \quad (25,6)$$

Остальные же члены в (25,5) определяют поправку к E_0 и спектр слабо возбужденных состояний газа.

Входящий в (25,5) интеграл U_0 должен еще быть выражен через реальную физическую величину — длину рассеяния a. В членах второго порядка это может быть сделано прямо по формуле (6,2): $U_0 = 4\pi\hbar^2 a/m$. В первом же члене нужна более точная формула (6,5), учитывающая второе борновское приближение в амплитуде рассеяния. При этом речь идет о столкновении двух частиц конденсата, соответственно чему в сумме в (6,5) надо положить $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0$, $\mathbf{p}_1' = -\mathbf{p}_2' \equiv \mathbf{p}$, так что будет

$$U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}\left(1 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{V} \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \frac{1}{p^2}\right).$$

Подставив это в (25,5), получим для гамильтониана

$$\hat{H} = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m} \frac{N^2}{V}\left(1 + \frac{4\pi\hbar^2 a}{V} \sum_{\mathbf{p}\neq 0} \frac{1}{p^2}\right) +$$
$$+ \frac{2\pi\hbar^2 a}{m} \frac{N}{V} \sum_{\mathbf{p}\neq 0} (\hat{a}_\mathbf{p}\hat{a}_{-\mathbf{p}} + \hat{a}_\mathbf{p}^+\hat{a}_{-\mathbf{p}}^+ + 2\hat{a}_\mathbf{p}^+\hat{a}_\mathbf{p}) + \sum_\mathbf{p} \frac{p^2}{2m} \hat{a}_\mathbf{p}^+ \hat{a}_\mathbf{p}. \quad (25,7)$$

Для определения уровней энергии надо привести гамильтониан к диагональному виду, что осуществляется надлежащим линейным преобразованием операторов $\hat{a}_\mathbf{p}$, $\hat{a}_\mathbf{p}^+$. Введем новые операторы $\hat{b}_\mathbf{p}$, $\hat{b}_\mathbf{p}^+$, согласно определению,

$$\hat{a}_\mathbf{p} = u_\mathbf{p}\hat{b}_\mathbf{p} + v_\mathbf{p}\hat{b}_{-\mathbf{p}}^+, \quad \hat{a}_\mathbf{p}^+ = u_\mathbf{p}\hat{b}_\mathbf{p}^+ + v_\mathbf{p}\hat{b}_{-\mathbf{p}},$$

причем потребуем, чтобы они удовлетворяли таким же соотношениям коммутации

$$\hat{b}_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}'}-\hat{b}_{\mathbf{p}'}\hat{b}_{\mathbf{p}}=0, \quad \hat{b}_{\mathbf{p}}\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}'}-\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}'}\hat{b}_{\mathbf{p}}=\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'},$$

каким удовлетворяют операторы $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}^{+}_{\mathbf{p}}$. Легко видеть, что для этого должны быть $u_{\mathbf{p}}^2-v_{\mathbf{p}}^2=1$. Учтем это, написав линейное преобразование в виде

$$\hat{a}_{\mathbf{p}}=\frac{\hat{b}_{\mathbf{p}}+L_{\mathbf{p}}\hat{b}^{+}_{-\mathbf{p}}}{\sqrt{1-L_{\mathbf{p}}^2}}, \quad \hat{a}^{+}_{\mathbf{p}}=\frac{\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}+L_{\mathbf{p}}\hat{b}_{-\mathbf{p}}}{\sqrt{1-L_{\mathbf{p}}^2}}. \tag{25,8}$$

Величину $L_{\mathbf{p}}$ надо определить таким образом, чтобы в гамильтониане выпали недиагональные члены ($\hat{b}_{\mathbf{p}}\hat{b}_{-\mathbf{p}}$, $\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}\hat{b}^{+}_{-\mathbf{p}}$). Простое вычисление дает

$$L_{\mathbf{p}}=\frac{1}{mu^2}\left\{\varepsilon(p)-\frac{p^2}{2m}-mu^2\right\}, \tag{25,9}$$

где введены обозначения;

$$\varepsilon(p)=\left[u^2p^2+\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2\right]^{1/2}, \tag{25,10}$$

$$u=\left(\frac{4\pi\hbar^2aN}{m^2V}\right)^{1/2}. \tag{25,11}$$

При этом гамильтониан принимает вид

$$\hat{H}=E_0+\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\varepsilon(p)\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}, \tag{25,12}$$

где

$$E_0=\frac{N}{2}mu^2+\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\left\{\varepsilon(p)-\frac{p^2}{2m}-mu^2+\frac{m^3u^4}{p^2}\right\}. \tag{25,13}$$

Вид гамильтониана (25,12) и бозевские соотношения коммутации для операторов $\hat{b}_{\mathbf{p}}$, $\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}$ позволяют заключить, что $\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{b}_{\mathbf{p}}$ представляют собой операторы рождения и уничтожения квазичастиц с энергией $\varepsilon(p)$, подчиняющихся статистике Бозе. Собственные значения диагонального оператора $\hat{b}^{+}_{\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}$ представляют собой числа $n_{\mathbf{p}}$ квазичастиц с импульсом $\mathbf{p}$, а формула (25,10) определяет зависимость их энергии от импульса (числа заполнения квазичастиц снова обозначены посредством $n_{\mathbf{p}}$, в отличие от чисел заполнения $N_{\mathbf{p}}$ истинных частиц газа). Тем самым полностью определен энергетический спектр слабо возбужденных состояний рассматриваемого газа.

Величина же E_0 есть энергия основного состояния газа. Заменив суммирование по дискретным значениям $\mathbf{p}$ (в объеме V)

интегрированием по $Vd^3p/(2\pi\hbar)^3$ и произведя вычисления, получим следующее выражение:

$$E_0=\frac{2\pi\hbar^2aN^2}{mV}\left[1+\frac{128}{15}\sqrt{\frac{a^3N}{\pi V}}\right] \tag{25,14}$$

(*T. D. Lee, C. N. Yang*, 1957). Для химического потенциала газа (при $T=0$) соответственно имеем

$$\mu=\frac{\partial E_0}{\partial N}=\frac{4\pi\hbar^2aN}{mV}\left[1+\frac{32}{3}\sqrt{\frac{a^3N}{\pi V}}\right]. \tag{25,15}$$

Эти формулы представляют собой два первых члена разложений по степеням $(a^3N/V)^{1/2}$. Но уже следующий член не мог бы быть вычислен изложенным способом. Он должен содержать объем как V^{-2}, а величина этого порядка зависит уже не только от двойных, но и от тройных столкновений.

При больших значениях импульса ($p\gg mu$) энергия квазичастиц (25,10) стремится к $p^2/2m$, т. е. к кинетической энергии отдельной частицы газа.

При малых же импульсах ($p\ll mu$) имеем $\varepsilon\approx up$. Легко видеть, что коэффициент u совпадает со скоростью звука в газе, так что это выражение отвечает фононам в соответствии с общими утверждениями § 22. При $T=0$ свободная энергия совпадает с энергией E_0; и взяв главный член в разложении последней, находим давление

$$P=-\frac{\partial E}{\partial V}=\frac{2\pi\hbar^2aN^2}{mV^2}.$$

Скорость же звука получается как $u=\sqrt{\partial P/\partial\rho}$ (где $\rho=mN/V$ — плотность газа) и совпадает с (25,11).

Отметим, что в рассматриваемой модели бозе-газа длина рассеяния a непременно должна быть положительной величиной (отталкивательное взаимодействие между частицами). Это видно формально уже из того, что в полученных формулах для энергии при $a<0$ появились бы мнимые члены. Термодинамический же смысл условия $a>0$ заключается в том, что оно необходимо для соблюдения в данной модели бозе-газа неравенства $(\partial P/\partial V)_T<0$.

Статистическое распределение элементарных возбуждений (средние значения $\bar{n}_{\mathbf{p}}$ их чисел заполнения) при отличной от нуля температуре дается просто формулой распределения Бозе (22,2). Распределение же $\bar{N}_{\mathbf{p}}$ истинных частиц газа по импульсам можно вычислить усреднением оператора $\hat{a}^+_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}$. Использовав (25,8) и учитывая, что произведения $\hat{b}_{-\mathbf{p}}\hat{b}_{\mathbf{p}}$ и $\hat{b}^+_{\mathbf{p}}\hat{b}^+_{-\mathbf{p}}$ не имеют диагональных матричных элементов, получим

$$\overline{N}_{\mathbf{p}} = \frac{\overline{n}_{\mathbf{p}} + L_{\mathbf{p}}^2 (\overline{n}_{\mathbf{p}} + 1)}{1 - L_{\mathbf{p}}^2}. \tag{25,16}$$

Это выражение справедливо, разумеется, лишь при $\mathbf{p} \neq 0$. Число же частиц с нулевым импульсом

$$\overline{N}_0 = N - \sum_{\mathbf{p} \neq 0} \overline{N}_{\mathbf{p}} = N - \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int \overline{N}_{\mathbf{p}}\, d^3p. \tag{25,17}$$

В частности, при абсолютном нуле все $n_{\mathbf{p}} = 0$, и с помощью (25,9) получим из (25,16) функцию распределения в виде[1])

$$N_{\mathbf{p}} = \frac{m^2u^4}{2\varepsilon(p)\{\varepsilon(p) + p^2/2m + mu^2\}} \tag{25,18}$$

(при $T = 0$ средние значения $N_{\mathbf{p}}$ совпадают с точными значениями; поэтому черту над буквой опускаем). Неидеальность бозе-газа приводит, естественно, к появлению частиц с отличным от нуля импульсом и при абсолютном нуле; интегрирование в (25,17) с $N_{\mathbf{p}}$ из (25,18) производится элементарно и дает

$$N_0 = N\left[1 - \frac{8}{3}\sqrt{\frac{Na^3}{\pi V}}\right]. \tag{25,19}$$

Наконец, сделаем еще следующее замечание по поводу полученного здесь спектра. При малых p производная $d^2\varepsilon/dp^2 > 0$, т. е. кривая $\varepsilon(p)$ загибается вверх от начальной касательной $\varepsilon = up$. В таком случае (см. ниже § 34) возникает неустойчивость спектра, связанная с возможностью самопроизвольного распада квазичастиц (фононов). Соответствующая ширина уровней, однако, мала (пропорциональна p^5 при малых p) и не затрагивает выражений, получающихся в рассмотренных приближениях.

§ 26. Волновая функция конденсата

Как уже упоминалось в § 23, появление или исчезновение сверхтекучести в жидком гелии происходит путем фазового перехода второго рода. Такой переход всегда связан с каким-либо качественным изменением свойств тела. В случае λ-точки жидкого гелия это изменение может быть описано макроскопи-

---

[1]) Отметим, что максимум числа частиц с заданной величиной импульса ($\sim p^2N_{\mathbf{p}}$) лежит при $p/\hbar \sim \sqrt{aN/V}$, где происходит переход от одного предельного выражения $\varepsilon(p)$ к другому. Это обстоятельство было уже упомянуто в примечании на стр. 123.