диагональных матричных элементов, получим

$$\overline{N}_{\mathbf{p}}=\frac{\overline{n}_{\mathbf{p}}+L_{\mathbf{p}}^2(\overline{n}_{\mathbf{p}}+1)}{1-L_{\mathbf{p}}^2}. \qquad (25,16)$$

Это выражение справедливо, разумеется, лишь при $\mathbf{p}\neq 0$. Число же частиц с нулевым импульсом

$$\overline{N}_0=N-\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\overline{N}_{\mathbf{p}}=N-\frac{V}{(2\pi\hbar)^3}\int\overline{N}_{\mathbf{p}}\,d^3p. \qquad (25,17)$$

В частности, при абсолютном нуле все $n_{\mathbf{p}}=0$, и с помощью (25,9) получим из (25,16) функцию распределения в виде[1])

$$N_{\mathbf{p}}=\frac{m^2u^4}{2\varepsilon(p)\{\varepsilon(p)+p^2/2m+mu^2\}} \qquad (25,18)$$

(при $T=0$ средние значения $N_{\mathbf{p}}$ совпадают с точными значениями; поэтому черту над буквой опускаем). Неидеальность бозе-газа приводит, естественно, к появлению частиц с отличным от нуля импульсом и при абсолютном нуле; интегрирование в (25,17) с $N_{\mathbf{p}}$ из (25,18) производится элементарно и дает

$$N_0=N\left[1-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{Na^3}{\pi V}}\right]. \qquad (25,19)$$

Наконец, сделаем еще следующее замечание по поводу полученного здесь спектра. При малых p производная $d^2\varepsilon/dp^2>0$, т. е. кривая $\varepsilon(p)$ загибается вверх от начальной касательной $\varepsilon=up$. В таком случае (см. ниже § 34) возникает неустойчивость спектра, связанная с возможностью самопроизвольного распада квазичастиц (фононов). Соответствующая ширина уровней, однако, мала (пропорциональна p^5 при малых p) и не затрагивает выражений, получающихся в рассмотренных приближениях.

§ 26. Волновая функция конденсата

Как уже упоминалось в § 23, появление или исчезновение сверхтекучести в жидком гелии происходит путем фазового перехода второго рода. Такой переход всегда связан с каким-либо качественным изменением свойств тела. В случае λ-точки жидкого гелия это изменение может быть описано макроскопи-

---

[1]) Отметим, что максимум числа частиц с заданной величиной импульса ($\sim p^2N_{\mathbf{p}}$) лежит при $p/\hbar\sim\sqrt{aN/V}$, где происходит переход от одного предельного выражения $\varepsilon(p)$ к другому. Это обстоятельство было уже упомянуто в примечании на стр. 123.

ческим образом, как появление или исчезновение сверхтекучей компоненты жидкости. С более глубокой, микроскопической точки зрения речь идет об определенных свойствах распределения частиц (истинных!) жидкости по импульсам. Именно в сверхтекучей жидкости, в отличие от несверхтекучей, конечная доля частиц (т. е. макроскопически большое их число) имеет строго равный нулю импульс; эти частицы образуют *бозе-эйнштейновский конденсат* (или просто конденсат) в импульсном пространстве. Напомним, что в идеальном бозе-газе при $T=0$ все его частицы переходят в конденсат (см. V § 62), а в почти идеальном газе — почти все частицы. В общем же случае бозе-жидкости с сильным взаимодействием между частицами доля числа частиц, находящихся при $T=0$ в конденсате, отнюдь не близка к единице.

Покажем, каким образом свойство бозе-эйнштейновской конденсации формулируется в терминах ψ-операторов.

Для идеального бозе-газа — системы невзаимодействующих бозонов — гейзенберговский ψ-оператор записывается в явном виде как[1])

$$\hat{\Psi}(t,\mathbf{r})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathbf{pr}-\frac{i}{\hbar}\frac{p^2}{2m}t\right\}. \tag{26,1}$$

Как было объяснено в § 25, можно пренебречь некоммутативностью операторов $\hat{a}_0$ и $\hat{a}_0^+$, т. е. рассматривать их как классические величины. Другими словами, обычным числом оказывается часть ψ-оператора (26,1), которую обозначим через Ξ:

$$\hat{\Xi}=\frac{\hat{a}_0}{\sqrt{V}}. \tag{26,2}$$

Для формулировки этого свойства ψ-операторов в общем случае произвольной бозе-жидкости заметим, что поскольку в конденсате все равно находится макроскопически большое число частиц, то изменение этого числа на 1 по существу не меняет состояния системы; можно сказать, что в результате добавления (или отнятия) одной частицы в конденсат из некоторого состояния системы N частиц получается «то же самое» состояние системы $N\pm 1$ частиц[2]). В частности, основное состояние остается основным. Обозначив посредством $\hat{\Xi}$, $\hat{\Xi}^+$ ту часть

[1]) Ср. (9,3). Мы предполагаем частицы газа бесспиновыми, поэтому спиновый индекс отсутствует. В (26,1) учтено также, что для идеального бозе-газа при $T=0$ химический потенциал $\mu=0$, и поэтому член $-\mu t/\hbar$ в показателях опущен.

[2]) Добавление или удаление частицы надо представлять себе как совершаемое бесконечно медленно. Этим исключается возбуждение системы переменным полем.

ψ-операторов, которая меняет на 1 число частиц в конденсате, имеем, таким образом, по определению,

$$\hat{\Xi}\,|m, N+1\rangle = \Xi\,|m, N\rangle, \quad \hat{\Xi}^{+}\,|m, N\rangle = \Xi^{*}|m, N+1\rangle,$$

где символы $|m, N\rangle$ и $|m, N+1\rangle$ обозначают два «одинаковых» состояния, отличающихся только числом частиц в системе, а Ξ — некоторое комплексное число. Эти утверждения справедливы строго в пределе $N \to \infty$. Поэтому определение величины Ξ следует записать в виде

$$\lim_{N\to\infty} \langle m, N\,|\,\hat{\Xi}\,|\,m, N+1\rangle = \Xi, \qquad \lim_{N\to\infty} \langle m, N+1\,|\,\hat{\Xi}^{+}\,|\,m, N\rangle = \Xi^{*}; \tag{26,3}$$

переход к пределу совершается при заданном конечном значении плотности жидкости N/V.

Если представить ψ-операторы в виде

$$\hat{\Psi} = \hat{\Xi} + \hat{\Psi}', \quad \hat{\Psi}^{+} = \hat{\Xi}^{+} + \hat{\Psi}'^{+}, \tag{26,4}$$

то остальная («надконденсатная») их часть переводит состояние $|m, N\rangle$ в ортогональные ему состояния, т. е. матричные элементы [1])

$$\lim_{N\to\infty} \langle m, N\,|\,\hat{\Psi}'\,|\,m, N+1\rangle = 0, \quad \lim_{N\to\infty} \langle m, N+1\,|\,\hat{\Psi}'^{+}\,|\,m, N\rangle = 0. \tag{26,5}$$

В пределе $N \to \infty$ разница между состояниями $|m, N\rangle$ и $|m, N+1\rangle$ исчезает вовсе, и в этом смысле величина Ξ становится средним значением оператора $\hat{\Psi}$ по этому состоянию. Подчеркнем, что характерным для системы с конденсатом является именно конечность этого предела.

Равенствами (26,3) исчерпываются «операторные» свойства $\hat{\Xi}$, $\hat{\Xi}^{+}$, и их можно считать коммутативными с $\hat{\Psi}'$, $\hat{\Psi}'^{+}$. В частности, операторы $\hat{\Xi}$, $\hat{\Xi}^{+}$ будут заменяться на Ξ, Ξ^{*} (т. е. вести себя как классические величины) при любых усреднениях по основному состоянию. Подчеркнем снова, что такое приближение связано (ввиду макроскопичности числа частиц в конденсате) с пренебрежением лишь величинами относительного порядка малости $1/N$ [2]).

[1]) Во избежание недоразумений напомним лишний раз, что эти равенства относятся лишь к переходам между «одинаковыми» состояниями!

[2]) С этой точностью, в частности, следует считать совпадающими матричные элементы операторов $\hat{\Psi}'$ для переходов между различными состояниями, отличающимися на одинаковое (малое) число частиц в системе.

Если временна́я зависимость волновых функций определяется по гамильтониану $\hat{H}'=\hat{H}-\mu\hat{N}$, то величина Ξ не зависит от времени. Действительно, матричный элемент $\langle m, N\,|\,\Xi\,|\,m, N+1\rangle$ пропорционален

$$\exp\left\{-\frac{it}{\hbar}\left[E(N+1)-E(N)-(N+1)\mu+N\mu\right]\right\}.$$

Но показатель этой экспоненты обращается в нуль, поскольку (с точностью до величины $\sim 1/N$) $E(N+1)-E(N)=\mu$.

В однородной неподвижной жидкости Ξ не зависит также и от координат и (при надлежащем выборе фазы этой комплексной величины) равно просто

$$\Xi=\sqrt{n_0}, \tag{26,6}$$

где n_0 — число конденсатных частиц в единице объема жидкости. Действительно, $\hat{\Xi}^+\hat{\Xi}$ есть оператор плотности числа частиц в конденсате, а среднее значение этого оператора есть как раз n_0.

Существование конденсата приводит к качественному отличию в свойствах матрицы плотности частиц бозе-жидкости по сравнению с матрицей плотности в обычной жидкости. В произвольном состоянии однородной бозе-жидкости матрица плотности определяется выражением

$$N\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=\langle m, N\,|\,\hat{\Psi}^+(t, \mathbf{r}_2)\,\hat{\Psi}(t, \mathbf{r}_1)\,|\,m, N\rangle, \tag{26,7}$$

причем эта функция зависит лишь от разности $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$ (ср. (7,13)). Подставив сюда ψ-операторы в виде (26,4) и учитывая свойства (26,3) и (26,5), получим

$$N\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)=n_0+N\rho'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \tag{26,8}$$

«Надконденсатная» матрица плотности ρ' стремится к нулю при $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to\infty$; матрица же плотности ρ стремится при этом к конечному пределу n_0/N. Этим выражается существование в сверхтекучей жидкости «дальнего порядка», отсутствующего в обычных жидкостях, где всегда $\rho\to 0$ при $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to\infty$. Это есть то свойство симметрии, которое отличает сверхтекучую фазу жидкости от несверхтекучей (*В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау*, 1950).

Фурье-компонента матрицы плотности определяет распределение частиц жидкости по импульсам согласно формуле

$$N(\mathbf{p})=N\int \rho(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}\,d^3x \tag{26,9}$$

(ср. (7,20)). Подставив сюда ρ в виде (26,8), получим

$$N(\mathbf{p})=(2\pi)^3 n_0\delta(\mathbf{p})+N\int \rho'(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}}\,d^3x. \tag{26,10}$$

Член с δ-функцией соответствует конечной вероятности частице иметь строго равный нулю импульс.

Если в жидкости происходит сверхтекучее движение, или если она находится в неоднородных и нестационарных внешних условиях (существенно меняющихся, однако, лишь на расстояниях, больших по сравнению с межатомными), то бозе-эйнштейновская конденсация по-прежнему имеет место, но уже нельзя утверждать, что она будет происходить в состояние с $\mathbf{p}=0$. Величина Ξ, по-прежнему определяемая согласно (26,3), будет теперь функцией координат и времени, имеющей смысл волновой функции частицы в конденсатном состоянии. Она нормирована условием $|\Xi|^2=n_0$ и потому может быть представлена в виде

$$\Xi(t, \mathbf{r})=\sqrt{n_0(t, \mathbf{r})}\, e^{i\Phi(t, \mathbf{r})}. \tag{26,11}$$

Благодаря тому, что в конденсатном состоянии находится макроскопически большое число частиц, волновая функция этого состояния становится классической макроскопической величиной [1]). Таким образом, в сверхтекучей жидкости появляется новая характеристика макроскопических состояний, в том числе термодинамически равновесных.

Плотность потока, вычисленная по волновой функции (26,11), есть

$$\mathbf{j}_{\text{конд}}=\frac{i\hbar}{2m}(\Xi\nabla\Xi^*-\Xi^*\nabla\Xi)=\frac{\hbar}{m}n_0\nabla\Phi,$$

где m — масса частицы жидкости. По своему смыслу, это есть плотность макроскопического потока конденсатных частиц, и ее можно представить в виде $n_0\mathbf{v}_s$, где $\mathbf{v}_s$ — макроскопическая скорость этого движения. Из сравнения обоих выражений находим, что

$$\mathbf{v}_s=\frac{\hbar}{m}\nabla\Phi. \tag{26,12}$$

Поскольку это движение может иметь место в термодинамически равновесном состоянии (характеризуемом величиной Ξ), то оно бесдиссипативно, так что (26,12) определяет скорость сверхтекучего движения. Мы снова приходим, таким образом, к уже упомянутому в § 23 свойству сверхтекучего движения — его потенциальности. При этом потенциал скорости φ оказывается совпадающим (с точностью до постоянного множителя) с фазой

[1]) Аналогично тому, как становится классической величиной напряженность поля электромагнитных волн при больших числах заполнения фотонов в каждом состоянии (ср. IV § 5).

конденсатной волновой функции

$$\varphi = \frac{\hbar}{m}\Phi. \qquad (26,13)$$

Во избежание недоразумений подчеркнем, однако, что, хотя скорость конденсата и совпадает со скоростью сверхтекучей компоненты жидкости (и хотя конденсат и сверхтекучая компонента одновременно появляются в λ-точке), плотность конденсата mn_0 и плотность сверхтекучей компоненты ρ_s отнюдь не совпадают друг с другом. Не говоря уже о том, что отождествление этих двух величин никак не могло бы быть обосновано, его неправильность видна и из того, что при абсолютном нуле вся масса жидкости является сверхтекучей, между тем как отнюдь не все ее частицы находятся в конденсате[1]).

§ 27. Температурная зависимость плотности конденсата

Плотность числа частиц в конденсате максимальна при $T=0$, а при повышении температуры она падает. Предельный закон температурной зависимости этой плотности при $T\to 0$ может быть найден путем рассмотрения флуктуаций макроскопической величины — конденсатной волновой функции Ξ (*R. A. Ferrell, N. Menyhard, H. Schmidt, F. Schwabl, P. Szépfalusy*, 1968).

Напомним прежде всего, что Ξ есть классическая величина, которой в квантовомеханическом формализме отвечает оператор $\hat{\Psi}$. Поэтому для вычисления флуктуаций следовало бы, в принципе, пользоваться этим оператором. С другой стороны, вблизи абсолютного нуля основную роль в спектре флуктуаций макроскопической величины играют длинноволновые колебания. Эти колебания в жидкости представляют собой звуковые волны, описывающиеся макроскопическими уравнениями гидродинамики, и тем самым возникает возможность построить оператор, отвечающий величине Ξ, путем ее независимого квантования.

В данном случае для величины $\Xi=\sqrt{n_0}\exp(i\Phi)$ в длинноволновом пределе наиболее сильно флуктуирует фаза Φ, непосредственно связанная с потенциалом сверхтекучей скорости формулой (26,13). Напомним, что обе величины φ и Φ неоднозначны — к ним можно прибавить любую константу. Однозначная же величина $\sqrt{n_0}$ может выражаться поэтому лишь через производные от Φ, а потому компоненты Фурье ее флуктуаций будут содержать лишние степени волнового вектора $\mathbf{k}$, т. е. будут малы при малых $\mathbf{k}$.

[1]) Фактически плотность конденсата в жидком гелии составляет, по-видимому, лишь малую долю от полной плотности жидкости.