конденсатной волновой функции

$$\varphi = \frac{\hbar}{m}\Phi. \qquad (26,13)$$

Во избежание недоразумений подчеркнем, однако, что, хотя скорость конденсата и совпадает со скоростью сверхтекучей компоненты жидкости (и хотя конденсат и сверхтекучая компонента одновременно появляются в λ-точке), плотность конденсата mn_0 и плотность сверхтекучей компоненты ρ_s отнюдь не совпадают друг с другом. Не говоря уже о том, что отождествление этих двух величин никак не могло бы быть обосновано, его неправильность видна и из того, что при абсолютном нуле вся масса жидкости является сверхтекучей, между тем как отнюдь не все ее частицы находятся в конденсате[1]).

§ 27. Температурная зависимость плотности конденсата

Плотность числа частиц в конденсате максимальна при $T=0$, а при повышении температуры она падает. Предельный закон температурной зависимости этой плотности при $T\to 0$ может быть найден путем рассмотрения флуктуаций макроскопической величины — конденсатной волновой функции Ξ (*R. A. Ferrell, N. Menyhard, H. Schmidt, F. Schwabl, P. Szépfalusy*, 1968).

Напомним прежде всего, что Ξ есть классическая величина, которой в квантовомеханическом формализме отвечает оператор $\hat{\Psi}$. Поэтому для вычисления флуктуаций следовало бы, в принципе, пользоваться этим оператором. С другой стороны, вблизи абсолютного нуля основную роль в спектре флуктуаций макроскопической величины играют длинноволновые колебания. Эти колебания в жидкости представляют собой звуковые волны, описывающиеся макроскопическими уравнениями гидродинамики, и тем самым возникает возможность построить оператор, отвечающий величине Ξ, путем ее независимого квантования.

В данном случае для величины $\Xi=\sqrt{n_0}\exp(i\Phi)$ в длинноволновом пределе наиболее сильно флуктуирует фаза Φ, непосредственно связанная с потенциалом сверхтекучей скорости формулой (26,13). Напомним, что обе величины φ и Φ неоднозначны — к ним можно прибавить любую константу. Однозначная же величина $\sqrt{n_0}$ может выражаться поэтому лишь через производные от Φ, а потому компоненты Фурье ее флуктуаций будут содержать лишние степени волнового вектора $\mathbf{k}$, т. е. будут малы при малых $\mathbf{k}$.

[1]) Фактически плотность конденсата в жидком гелии составляет, по-видимому, лишь малую долю от полной плотности жидкости.

Связь фазы Φ с потенциалом φ позволяет прямо связать ее с величинами, характеризующими распределение фононов в жидкости. Для этого рассматриваем φ, а тем самым и Φ как вторично-квантованный оператор, выразив его, согласно (24, 10), через операторы рождения и уничтожения фононов:

$$\hat{\Phi} = \sum_{\mathbf{p}} \left(\frac{mu}{2Vn\,p}\right)^{1/2} (\hat{c}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{pr}/\hbar} + \hat{c}_{\mathbf{p}}^{+} e^{-i\mathbf{pr}/\hbar}) \qquad (27,1)$$

(невозмущенную плотность жидкости записываем в виде $\rho = nm$, где n — плотность числа частиц, индекс 0 опускаем). Согласно сказанному выше, это означает, что оператор макроскопической величины Ξ, т. е. длинноволновая часть оператора $\hat{\Psi}$, может быть представлена в виде

$$\hat{\Psi} = \sqrt{n_0}\, \exp(i\hat{\Phi}), \qquad (27,2)$$

где n_0 — плотность частиц конденсата.

Прежде всего воспользуемся этой формулой для вычисления распределения «надконденсатных» частиц бозе-жидкости по импульсам (при малых значениях последних). В одночастичной матрице плотности $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ при больших расстояниях $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ можно воспользоваться длинноволновым выражением ψ-оператора (27,2):

$$N\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \hat{\Psi}^{+}(\mathbf{r}_2)\, \hat{\Psi}(\mathbf{r}_1) \rangle \approx n_0 \langle e^{-i\hat{\Phi}^{+}(\mathbf{r}_2)} e^{i\hat{\Phi}(\mathbf{r}_1)} \rangle, \qquad (27,3)$$

где среднее берется по состоянию жидкости при данной температуре. Ввиду малости флуктуаций следует разложить это выражение по степеням $\hat{\Phi}$, сохраняя лишь первые неисчезающие (квадратичные) члены. Учитывая, что $\hat{\Phi}^{+} = \hat{\Phi}$, получим

$$N\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = n_0 - n_0 \langle \hat{\Phi}^2(\mathbf{r}) \rangle + n_0 \langle \hat{\Phi}(\mathbf{r}_2)\, \hat{\Phi}(\mathbf{r}_1) \rangle. \qquad (27,4)$$

Третий член стремится к нулю при $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \to \infty$ и дает искомую надконденсатную часть матрицы плотности (второй же член в однородной жидкости вообще не зависит от $\mathbf{r}$ и дает поправку к плотности конденсата, которая будет вычислена ниже несколько иным способом). Используя (27,1), приводим надконденсатную часть к виду

$$N\rho'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{n_0 mu}{2Vn} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{p} \left\{ \langle \hat{c}_{\mathbf{p}}^{+} \hat{c}_{\mathbf{p}} \rangle e^{-i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\hbar} + \langle \hat{c}_{\mathbf{p}} \hat{c}_{\mathbf{p}}^{+} \rangle e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\hbar} \right\} =$$
$$= \frac{n_0 mu}{Vn} \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{p} \left(n_{\mathbf{p}} + \frac{1}{2}\right) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)/\hbar},$$

где

$$n_{\mathbf{p}} = [e^{pu/T} - 1]^{-1}.$$

Переходя от суммирования к интегрированию, имеем

$$N\rho'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{n_0 m u}{n} \int \frac{n_\mathbf{p} + {}^1/_2}{p} e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad (27,5)$$

Это выражение, разумеется, справедливо только для вклада от малых p ($\hbar/p$ велико по сравнению с межатомными расстояниями). Подынтегральное выражение в (27,5) прямо определяет распределение частиц по импульсам

$$N(\mathbf{p}) = \frac{n_0 m u}{np}\left(n_\mathbf{p} + \frac{1}{2}\right). \qquad (27,6)$$

При $T=0$ эта формула дает

$$N(\mathbf{p}) = \frac{n_0 m u}{2np} \qquad (27,7)$$

(*J. Gavoret*, *Ph. Noziéres*, 1964), а при $T \neq 0$, $up \ll T$;

$$N(\mathbf{p}) = \frac{n_0 m T}{np^2}. \qquad (27,8)$$

Теперь можно определить температурную зависимость плотности конденсата. По определению, имеем

$$n_0(T) = n - \int N(\mathbf{p}) \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad (27,9)$$

Если прямо подставить в эту формулу (27,6), интеграл разойдется из-за нулевых колебаний. Это обстоятельство связано с неприменимостью (27,6) при больших p и означает лишь невозможность вычислить таким способом значение конденсатной плотности при $T=0$, которое надо считать здесь заданной величиной. Для определения же искомой температурной зависимости надо вычесть из $n_0(T)$ ее значение при $T=0$, после чего интеграл уже будет сходиться. В результате получим

$$\frac{n_0(T) - n_0(0)}{n_0(0)} = -\frac{mu}{n} \int \frac{n_\mathbf{p}}{p} \frac{d^3p}{(2\pi\hbar)^3} = -\frac{mT^2}{2\pi^2 n u \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = -\frac{mT^2}{12 n u \hbar^3}. \qquad (27,10)$$

При вычислении мы пренебрегли температурной зависимостью полной плотности жидкости; это пренебрежение законно, поскольку тепловое расширение жидкости (связанное с возбуждением фононов) пропорционально более высокой степени температуры — T^4 (ср. V § 67)[1]).

[1]) Полученные формулы, справедливые для любой бозе-жидкости, находятся, конечно, в согласии с полученными в § 25 формулами для слабо неидеального бозе-газа. При сравнении надо учесть, что для такого газа $n_0 \approx n$, а условие малости p имеет вид $p \ll mu \sim \hbar(an)^{1/2}$.

Наконец, сделаем некоторые замечания о методически интересном вопросе о двумерной бозе-жидкости. В этом случае зависящая от температуры часть интеграла (27,9) логарифмически расходится в области малых $\mathbf{p}$, где формула для $N(\mathbf{p})$ должна была бы быть верна. Это означает, что в двумерном случае неверно основное предположение о существовании конденсата при отличных от нуля температурах; конденсат в этом случае может существовать лишь при $T=0$[1]). Положение здесь аналогично ситуации с двумерными кристаллами (см. V § 137). Подобно тому как в последних флуктуации смещения атомов размывают решетку, так флуктуации фазы уничтожают конденсат. Формальная аналогия между двумя системами состоит в том, что в обоих случаях энергия зависит от величин, которые могут входить в нее лишь под знаком производных. В первом случае это — векторы смещения атомов, которые не могут сами войти в энергию ввиду инвариантности последней по отношению к смещениям системы как целого. Во втором случае это — фаза конденсатной волновой функции, которая не может сама войти в энергию ввиду своей неоднозначности. Тот факт, что энергия зависит лишь от градиентов этих величин и приводит в конечном счете к расходимости флуктуаций.

Далее, мы видели в V § 138, что слабая (логарифмическая) расходимость флуктуаций приводит в двумерном кристалле к медленному (степенному) убыванию корреляционной функции в системе. Аналогично, в двумерной бозе-системе матрица плотности (27,3) убывает при $|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|\to\infty$, а не стремится к постоянному пределу как при наличии конденсата, но лишь по степенному закону[2]). Заметим, что тем самым такая система качественно отличается от обычной жидкости, так что и в двумерном случае возможен фазовый переход второго рода между обычной жидкостью с экспоненциальным убыванием $\rho(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ и жидкостью со степенным законом убывания.

§ 28. Поведение сверхтекучей плотности вблизи λ-точки

Как уже упоминалось в § 23, с повышением температуры доля сверхтекучей плотности ρ_s/ρ бозе-жидкости убывает, обращаясь в нуль в точке фазового перехода второго рода — так называемой λ-точки жидкости. Температура T_λ этой точки является функцией давления P; уравнение $T=T_\lambda(P)$ определяет линию λ-точек на фазовой диаграмме в плоскости P, T.

В общей теории фазовых переходов второго рода изменение состояния тела описывается поведением параметра порядка,

[1]) Эти утверждения относятся и к двумерному идеальному бозе-газу.

[2]) Подробнее см. *J. W. Kane, L. Kadanoff*, Phys. Rev. **155**, 80 (1967)