

Наконец, сделаем некоторые замечания о методически интересном вопросе о двумерной бозе-жидкости. В этом случае зависящая от температуры часть интеграла (27,9) логарифмически расходится в области малых p , где формула для $N(p)$ должна была бы быть верна. Это означает, что в двумерном случае неверно основное предположение о существовании конденсата при отличных от нуля температурах; конденсат в этом случае может существовать лишь при $T=0$ ¹⁾. Положение здесь аналогично ситуации с двумерными кристаллами (см. V § 137). Подобно тому как в последних флуктуации смещения атомов размывают решетку, так флуктуации фазы уничтожают конденсат. Формальная аналогия между двумя системами состоит в том, что в обоих случаях энергия зависит от величин, которые могут входить в нее лишь под знаком производных. В первом случае это — векторы смещения атомов, которые не могут сами войти в энергию ввиду инвариантности последней по отношению к смещениям системы как целого. Во втором случае это — фаза конденсатной волновой функции, которая не может сама войти в энергию ввиду своей неоднозначности. Тот факт, что энергия зависит лишь от градиентов этих величин и приводит в конечном счете к расходимости флуктуаций.

Далее, мы видели в V § 138, что слабая (логарифмическая) расходимость флуктуаций приводит в двумерном кристалле к медленному (степенному) убыванию корреляционной функции в системе. Аналогично, в двумерной бозе-системе матрица плотности (27,3) убывает при $|r_1 - r_2| \rightarrow \infty$, а не стремится к постоянному пределу как при наличии конденсата, но лишь по степенному закону²⁾. Заметим, что тем самым такая система качественно отличается от обычной жидкости, так что и в двумерном случае возможен фазовый переход второго рода между обычной жидкостью с экспоненциальным убыванием $\rho(r_1, r_2)$ и жидкостью со степенным законом убывания.

§ 28. Поведение сверхтекучей плотности вблизи λ -точки

Как уже упоминалось в § 23, с повышением температуры доля сверхтекучей плотности ρ_s/ρ бозе-жидкости убывает, обращаясь в нуль в точке фазового перехода второго рода — так называемой λ -точки жидкости. Температура T_λ этой точки является функцией давления P ; уравнение $T = T_\lambda(P)$ определяет линию λ -точек на фазовой диаграмме в плоскости P, T .

В общей теории фазовых переходов второго рода изменение состояния тела описывается поведением параметра порядка,

¹⁾ Эти утверждения относятся и к двумерному идеальному бозе-газу.

²⁾ Подробнее см. J. W. Kane, L. Kadanoff, Phys. Rev. 155, 80 (1967)

характеризующего его свойства симметрии. Для λ -перехода бозе-жидкости роль такого параметра играет волновая функция конденсата Ξ , описывающая, как было объяснено в § 26, «дальний порядок» в жидкости. Комплексность Ξ означает, что параметр порядка имеет две компоненты, причем эффективный гамильтониан системы (см. V § 147) зависит только от $|\Xi|^2$, т. е. инвариантен относительно преобразования $\Xi \rightarrow e^{i\alpha}\Xi$ с любым вещественным α .

Эмпирические данные о λ -переходе в жидком гелии свидетельствуют, по-видимому, о том, что для него отсутствует область применимости теории фазовых переходов Ландау: критерий V (146,15) не выполняется нигде в окрестности λ -точки (т. е. нигде в области $|T - T_\lambda| \ll T_\lambda$). Поэтому для описания свойств этого перехода надо пользоваться флуктуационной теорией фазовых переходов второго рода, дающей возможность связать друг с другом температурные зависимости различных величин.

Температурная зависимость параметра порядка (ϱ тем самым и плотности конденсата n_0) при $T \rightarrow T_\lambda$ дается критическим индексом β (см. V § 148):

$$|\Xi| = \sqrt{n_0} \propto (T_\lambda - T)^\beta. \quad (28,1)$$

Более интересен, однако, вопрос о поведении сверхтекучей плотности ρ_s . Для его вычисления рассмотрим жидкость, в которой фаза Φ конденсатной волновой функции медленно меняется в пространстве. Это значит, что в жидкости имеет место макроскопическое сверхтекучее движение со скоростью (26,12) и соответственно с кинетической энергией (на единицу объема жидкости)

$$\frac{\rho_s \bar{v}_s^2}{2} = \rho_s \frac{\hbar^2}{2m^2} (\nabla\Phi)^2. \quad (28,2)$$

Это выражение можно применить и к длинноволновым флуктуациям параметра порядка. Согласно гипотезе масштабной инвариантности, единственным параметром длины, определяющим флуктуационную картину в окрестности точки перехода, является корреляционный радиус флуктуаций r_c . Им же определяется, следовательно, порядок величины расстояний, на которых флуктуационное изменение фазы Φ порядка единицы; поэтому среднее значение квадрата флуктуационной скорости меняется с температурой по закону

$$\bar{v}_s^2 \propto r_c^2 \propto (T_\lambda - T)^{2\nu},$$

где ν — критический индекс корреляционного радиуса. С другой стороны, поскольку именно с длинноволновыми флуктуациями связана особенность термодинамических величин в точке

перехода, естественно считать, что в окрестности этой точки флуктуационная кинетическая энергия (28,2) меняется с температурой по тому же закону, что и сингулярная часть термодинамического потенциала жидкости, т. е. как $(T_\lambda - T)^{2-\alpha}$ (где α — критический индекс теплоемкости C_p). Таким образом, находим, что

$$\overline{\rho_s v_s^2} \sim \rho_s (T_\lambda - T)^{2\nu} \sim (T_\lambda - T)^{2-\alpha},$$

откуда $\rho_s \sim (T_\lambda - T)^{2-\alpha-2\nu}$. Наконец, учтя соотношение $3\nu = 2 - \alpha$ (следующее из гипотезы масштабной инвариантности — см. V § 149), получим окончательно

$$\rho_s \sim (T_\lambda - T)^{(2-\alpha)/3}. \quad (28,3)$$

Этим устанавливается связь между температурными зависимостями ρ_s и теплоемкости вблизи λ -точки (B. D. Josephson, 1966)¹).

§ 29. Квантованные вихревые нити

Обычная жидкость, заключенная в цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг своей оси, увлекается трением о стенки сосуда и в конце концов приводится во вращение как целое вместе с сосудом. В сверхтекучей жидкости увлекается во вращение только ее нормальная компонента; сверхтекучая же компонента остается неподвижной — в соответствии с тем, что эта компонента вообще не может вращаться как целое, так как при этом нарушалась бы потенциальность сверхтекучего движения²).

Однако при достаточно больших скоростях вращения такое состояние становится термодинамически невыгодным. Условие термодинамического равновесия состоит в минимальности величины

$$E_{\text{вп}} = E - \mathbf{M}\Omega, \quad (29,1)$$

представляющей собой энергию по отношению к вращающейся системе координат; E и \mathbf{M} — энергия и момент импульса системы относительно неподвижной системы координат (см. V § 26). Член $-\mathbf{M}\Omega$ в этом выражении и приводит (при достаточно больших Ω) к термодинамической выгоде состояния с $\mathbf{M}\Omega > 0$ по сравнению с состоянием с $\mathbf{M} = 0$.

¹) Индексы α и ζ для жидкого гелия фактически очень малы; поэтому с хорошей точностью $\beta \approx 1/3$, так что $\rho_s \sim n_0 \sim (T_\lambda - T)^{2/3}$.

²) При вращении жидкости как целого скорость $\mathbf{v} = [\Omega \mathbf{r}]$, где Ω — угловая скорость, а радиус-вектор \mathbf{r} отсчитывается от какой-либо точки на оси. При этом $\text{rot } \mathbf{v} = 2\Omega \neq 0$.