

перехода, естественно считать, что в окрестности этой точки флуктуационная кинетическая энергия (28,2) меняется с температурой по тому же закону, что и сингулярная часть термодинамического потенциала жидкости, т. е. как  $(T_\lambda - T)^{2-\alpha}$  (где  $\alpha$  — критический индекс теплоемкости  $C_p$ ). Таким образом, находим, что

$$\overline{\rho_s v_s^2} \sim \rho_s (T_\lambda - T)^{2\nu} \sim (T_\lambda - T)^{2-\alpha},$$

откуда  $\rho_s \sim (T_\lambda - T)^{2-\alpha-2\nu}$ . Наконец, учтя соотношение  $3\nu = 2 - \alpha$  (следующее из гипотезы масштабной инвариантности — см. V § 149), получим окончательно

$$\rho_s \sim (T_\lambda - T)^{(2-\alpha)/3}. \quad (28,3)$$

Этим устанавливается связь между температурными зависимостями  $\rho_s$  и теплоемкости вблизи  $\lambda$ -точки (B. D. Josephson, 1966)<sup>1</sup>).

## § 29. Квантованные вихревые нити

Обычная жидкость, заключенная в цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг своей оси, увлекается трением о стенки сосуда и в конце концов приводится во вращение как целое вместе с сосудом. В сверхтекучей жидкости увлекается во вращение только ее нормальная компонента; сверхтекучая же компонента остается неподвижной — в соответствии с тем, что эта компонента вообще не может вращаться как целое, так как при этом нарушалась бы потенциальность сверхтекучего движения<sup>2</sup>).

Однако при достаточно больших скоростях вращения такое состояние становится термодинамически невыгодным. Условие термодинамического равновесия состоит в минимальности величины

$$E_{\text{вп}} = E - \mathbf{M}\Omega, \quad (29,1)$$

представляющей собой энергию по отношению к вращающейся системе координат;  $E$  и  $\mathbf{M}$  — энергия и момент импульса системы относительно неподвижной системы координат (см. V § 26). Член  $-\mathbf{M}\Omega$  в этом выражении и приводит (при достаточно больших  $\Omega$ ) к термодинамической выгоде состояния с  $\mathbf{M}\Omega > 0$  по сравнению с состоянием с  $\mathbf{M} = 0$ .

<sup>1</sup>) Индексы  $\alpha$  и  $\zeta$  для жидкого гелия фактически очень малы; поэтому с хорошей точностью  $\beta \approx 1/3$ , так что  $\rho_s \sim n_0 \sim (T_\lambda - T)^{2/3}$ .

<sup>2</sup>) При вращении жидкости как целого скорость  $\mathbf{v} = [\Omega \mathbf{r}]$ , где  $\Omega$  — угловая скорость, а радиус-вектор  $\mathbf{r}$  отсчитывается от какой-либо точки на оси. При этом  $\text{rot } \mathbf{v} = 2\Omega \neq 0$ .

Таким образом, при увеличении скорости вращения сосуда должно в конце концов возникнуть сверхтекучее движение. Кажущееся противоречие между этим утверждением и условием потенциальности сверхтекучего движения устраняется предположением, что потенциальность нарушается только на некоторых особых линиях в жидкости — *вихревых нитях*<sup>1)</sup>. Вокруг этих линий жидкость совершает движение, которое можно назвать *потенциальным вращением*, так что во всем объеме вне линий  $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$ .

Вихревые нити в жидкости имеют толщину, измеряемую атомными размерами, и с макроскопической точки зрения должны рассматриваться как бесконечно тонкие<sup>2)</sup>. Их существование не противоречит выражению скорости в виде (26,12), так как это выражение предполагает достаточную медленность изменения  $\mathbf{v}_s$  в пространстве, между тем как вблизи вихревой линии  $\mathbf{v}_s$  меняется сколь угодно быстро (см. ниже формулу (29,3)). Она не противоречит также и изложенному в § 23 обоснованию потенциальности сверхтекучего движения свойствами энергетического спектра бозе-жидкости, так как с вихревой нитью связана определенная макроскопически большая энергия (см. ниже (29,8)), и состояние жидкости с нитью не может считаться слабо возбужденным.

Рассмотрим сначала вихревые нити с чисто кинематической точки зрения — как особые линии в распределении скорости при потенциальном движении жидкости. Каждая вихревая нить характеризуется определенным значением (обозначим его  $2\pi\kappa$ ) циркуляции скорости по замкнутому контуру, охватывающему эту нить:

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = 2\pi\kappa. \quad (29,2)$$

Это значение не зависит от выбора контура интегрирования. Действительно, если  $C_1$  и  $C_2$  — два контура, охватывающих вихревую нить, то разность циркуляций скорости вдоль них, согласно теореме Стокса, равна потоку вектора  $\text{rot } \mathbf{v}_s$  через поверхность, натянутую между  $C_1$  и  $C_2$ ; но поскольку эта поверхность нигде не пересекает вихревую нить, то во всех ее точках  $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$ , так что интеграл обращается в нуль. Отсюда же следует, что вихревая нить не может прерываться: она либо замкнута, либо оканчивается на границах жидкости (а в неограниченной жидкости — уходит обоими своими концами на

<sup>1)</sup> Это предположение было высказано Онсагером (*L. Onsager*, 1949) и затем развито Фейнманом (*R. P. Feynman*, 1955).

<sup>2)</sup> Это утверждение не относится, однако, к близкой окрестности  $\lambda$ -точки; здесь толщина вихревой нити порядка величины корреляционного радиуса флуктуаций.

бесконечность). Действительно, наличие у вихревой нити свободного конца означало бы возможность натянуть на контур  $C$  поверхность, нигде не пересекающую нить, в результате чего интеграл в левой стороне (29,2) обратился бы в нуль.

Условие (29,2) позволяет определить распределение скоростей в жидкости, движущейся вокруг вихревой нити. В простейшем случае прямолинейной нити в неограниченной жидкости линии тока являются окружностями, плоскости которых перпендикулярны нити, а центры лежат на ней. Циркуляция скорости вдоль такой линии равна  $2\pi r v_s$ , так что

$$v_s = \frac{\kappa}{r}, \quad (29,3)$$

где  $r$  — расстояние до нити. Отметим, что при потенциальном вращении скорость падает с удалением от оси вращения (вихревой нити) — в противоположность вращению как целого; где скорость возрастает пропорционально  $r$ .

Для вихревой нити произвольной формы распределение скоростей дается формулой

$$v_s = \frac{\kappa}{2} \int \frac{[dl \cdot R]}{R^3}, \quad (29,4)$$

где интегрирование производится вдоль нити, а  $R$  — радиус-вектор, проведенный от  $dl$  к точке наблюдения скорости<sup>1)</sup>. На расстояниях от нити, малых по сравнению с ее радиусом кривизны, формула (29,4) приближенно сводится, конечно, к (29,3).

Как уже было отмечено, формулы (29,2—4) являются следствием одной лишь потенциальности движения жидкости. Квантовая же природа вихревых нитей в сверхтекучей жидкости проявляется в том, что постоянная  $\kappa$  может иметь лишь значения из определенного дискретного ряда. Действительно, воспользовавшись выражением (26,12) скорости  $v_s$  через фазу  $\Phi$  волновой функции конденсата, находим для ее циркуляции

$$\oint v_s dl = \frac{\hbar}{m} \Delta\Phi, \quad (29,5)$$

где  $\Delta\Phi$  — изменение фазы при обходе контура. Но ввиду однозначности волновой функции изменение ее фазы при возвращении в исходную точку может быть лишь целым кратным

<sup>1)</sup> Это выражение можно написать прямо по аналогии с известной формулой Био — Савара для магнитного поля линейных токов. Формальное совпадение обеих задач очевидно из сравнения циркуляции скорости (29,2) с циркуляцией магнитного поля  $\mathbf{H}$  вокруг линейного тока  $J$ :  $\oint \mathbf{H} dl = \frac{4\pi}{c} J$ . Одна задача получается из другой заменой обозначений:  $\mathbf{H} \rightarrow v_s$ ,  $J/c \rightarrow \kappa/2$ .

от 2л. Отсюда следует, что

$$\kappa = n\hbar/m, \quad (29,6)$$

где  $n$ —целое число. Мы увидим ниже, что термодинамически устойчивы фактически лишь вихревые нити с наименьшим возможным значением циркуляции ( $n=1$ ). Поэтому далее мы будем полагать

$$\kappa = \hbar/m. \quad (29,7)$$

Определим теперь критическую скорость вращения цилиндрического сосуда, при которой впервые появляется вихревая нить. Из соображений симметрии очевидно, что эта нить будет расположена вдоль оси сосуда. Изменение энергии жидкости за счет появления в ней вихревой нити есть

$$\Delta E = \int \frac{\rho_s v_s^2}{2} dV = \frac{\rho_s}{2} L \int v_s^2 \cdot 2\pi r dr = L\rho_s \pi \kappa^2 \int \frac{dr}{r}$$

( $L$ —длина сосуда). Интегрирование по  $dr$  должно производиться в пределах между радиусом сосуда  $R$  и некоторым значением  $r \sim a$  порядка величины атомных расстояний, на которых макроскопическое рассмотрение теряет смысл; ввиду логарифмической расходимости интеграла его величина мало чувствительна к точному выбору значения  $a$ . Таким образом,

$$\Delta E = L\rho_s \frac{\hbar^2}{m^2} \ln \frac{R}{a} \quad (29,8)$$

(это выражение имеет, как говорят, логарифмическую точность, т. е. предполагается большим не только отношение  $R/a$ , но и его логарифм)<sup>1)</sup>. Момент же импульса вращающейся жидкости:

$$M = \int \rho_s v_s r dV = \rho_s \kappa \int dV = L\pi R^2 \frac{\hbar}{m} \rho_s. \quad (29,9)$$

Возникновение вихревой нити термодинамически выгодно, если  $\Delta E_{\text{вп}} = \Delta E - M\Omega < 0$ , т. е. если

$$\Omega > \Omega_{\text{кр}} = \frac{\hbar}{mR^2} \ln \frac{R}{a}. \quad (29,10)$$

Изложенные рассуждения позволяют также понять причину, по которой оказываются термодинамически неустойчивыми

<sup>1)</sup> Движение вокруг вихревой нити сопровождается, вообще говоря, некоторым изменением плотности жидкости. Пренебрежение в изложенном вычислении этим изменением оправдано тем, что основной вклад в энергию (29,8) возникает (в силу логарифмической расходимости интеграла) от больших расстояний  $r$ , на которых изменение плотности уже мало. По этой же причине можно пренебречь вкладом в  $\Delta E$  от изменения внутренней энергии жидкости.

вихревые нити с  $n > 1$  в (29,6). Действительно, при замене значения  $n=1$  значением  $n > 1$  энергия  $\Delta E$  увеличивается в  $n^2$  раз, а момент  $M$  — в  $n$  раз; при этом  $\Delta E_{\text{вр}}$  заведомо увеличится.

При дальнейшем увеличении скорости вращения цилиндрического сосуда (за критическим значением (29,10)) возникают новые вихревые нити, и при  $\Omega \gg \Omega_{\text{кр}}$  число этих нитей будет уже очень большим. Их распределение по сечению сосуда стремится при этом к равномерному, и в пределе их совокупность имитирует вращение всей сверхтекучей части жидкости как целого<sup>1)</sup>. Число вихревых нитей при заданном (большом) значении  $\Omega$  легко определить, потребовав, чтобы циркуляция скорости по контуру, охватывающему большое число нитей, имела бы значение, отвечающее вращению жидкости как целого. Если такой контур охватывает единичную площадь (в плоскости, перпендикулярной оси вращения), то

$$\oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = \nu \cdot 2\pi\kappa = 2\pi\nu \frac{\hbar}{m},$$

где  $\nu$  — плотность распределения вихревых нитей по сечению сосуда. С другой стороны, при вращении жидкости как целого  $\text{rot } \mathbf{v}_s = 2\Omega$ , и та же циркуляция равна  $2\Omega$ . Приравняв оба значения, найдем

$$\nu = m\Omega/\pi\hbar. \quad (29,11)$$

Появление вихревых нитей в известном смысле нарушает свойство сверхтекучести жидкости. Элементарные возбуждения, составляющие нормальную компоненту жидкости, будут теперь рассеиваться на нитях, передавая им (а тем самым — сверхтекучей компоненте жидкости) часть своего импульса. Это означает, другими словами, появление *силы взаимного трения* между обеими компонентами жидкости.

Вихревые нити, вообще говоря, перемещаются в пространстве вместе с текущей жидкостью. При  $T=0$ , когда жидкость целиком сверхтекуча, каждый элемент  $d\mathbf{l}$  нити движется с той скоростью  $\mathbf{v}_s$ , которую жидкость имеет в точке нахождения этого элемента. При отличных же от нуля температурах испытываемая вихревой нитью сила трения приводит к появлению некоторой скорости ее перемещения относительно сверхтекучей компоненты.

Вихревые нити, возникающие при вращении, имеют прямолинейную форму. Течение же жидкости по капиллярам, щелям

<sup>1)</sup> В этом легко убедиться, заметив, что так как число нитей растет пропорционально  $\Omega$  (см. ниже (29,11)), то второй член в  $\Delta E_{\text{вр}} = \Delta E - M\Omega$  растет, как  $\Omega^2$ , а первый — как  $\Omega$ , и поэтому при  $\Omega \gg \Omega_{\text{кр}}$  им можно пренебречь. Тогда минимизация  $\Delta E_{\text{вр}}$  сводится к максимизации  $M$ , достигаемой именно при вращении жидкости как целого.

и т. п. может сопровождаться образованием замкнутых вихревых нитей — *вихревых колец*. Оно приводит к нарушению сверхтекучести при течении со скоростями, превышающими определенную критическую величину. Фактические значения этих *критических скоростей* зависят от конкретных условий течения; они гораздо меньше того значения, за которым нарушается условие (23,3).

В противоположность прямолинейным вихревым нитям, которые могут стоять на месте в покоящейся (вдали от них) жидкости, вихревые кольца движутся относительно жидкости. Скорость перемещения каждого элемента длины нити есть то значение  $v_s$ , которое создается (согласно формуле (29,4)) в точке его нахождения всеми остальными участками нити; для искривленных нитей это значение, вообще говоря, отлично от нуля. В результате вихревые кольца имеют как целое не только определенные энергии, но и определенные импульсы и, в этом смысле, представляют собой особый тип элементарных возбуждений.

### Задачи

1. Найти скорость движения и импульс кругового вихревого кольца.

Решение. Каждый элемент кольца движется со скоростью  $v_s$  в данной точке, а ввиду симметрии кругового кольца эта скорость во всех его точках одинакова. Поэтому достаточно определить скорость  $v_s$ , создаваемую в какой-либо одной точке кольца  $P$  всеми остальными его частями. Элементы  $dl$  кольца и радиус-векторы  $\mathbf{R}$  от  $dl$  к точке  $P$  лежат в плоскости кольца; поэтому определяемая формулой (29,4) скорость в точке  $P$  перпендикулярна плоскости кольца (в результате чего кольцо перемещается без изменения своей формы и размера).

Определим положение элемента  $dl$  углом  $\vartheta$  (рис. 3). Тогда

$$dl = R_0 d\vartheta, \quad R = 2R_0 \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad |[dl \cdot \mathbf{R}]| = R \sin \frac{\vartheta}{2} dl$$

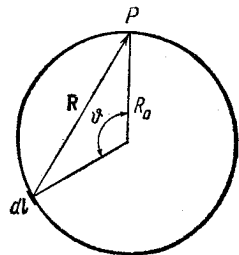


Рис. 3.

(где  $R_0$  — радиус кольца), и из (29,4) находим для скорости кольца  $v$  выражение

$$v = \frac{\kappa}{8R_0} 2 \int_0^\pi \frac{d\vartheta}{\sin(\vartheta/2)}$$

Этот интеграл, однако, логарифмически расходится на нижнем пределе и должен быть обрезан на значении  $\vartheta \sim a/R_0$ , отвечающем атомным расстояниям ( $\sim a$ ) элемента  $dl$  до точки  $P$ . С логарифмической точностью интеграл определяется областью значений  $a/R_0 \ll \vartheta \ll \pi$  и равен

$$\int_{-a/R_0}^{\sim 1} \frac{2 d\vartheta}{\vartheta} = 2 \ln \frac{R_0}{a}$$

так что

$$v = \frac{\kappa}{2R_0} \ln \frac{R_0}{a} = \frac{\hbar}{2mR_0} \ln \frac{R_0}{a}. \quad (1)$$

С той же логарифмической точностью энергия вихревого кольца

$$\epsilon = 2\pi^2 R_0 \rho_s \frac{\hbar^2}{m^2} \ln \frac{R_0}{a} \quad (2)$$

(формула (29,8) с заменой  $R \rightarrow R_0$ ,  $L \rightarrow 2\pi R_0$ ). Энергия  $\epsilon$  связана со скоростью  $v$  соотношением  $d\epsilon/d\rho = v$ , где  $\rho$  — импульс кольца. Отсюда

$$d\rho = \frac{d\epsilon}{v} = 4\pi^2 \rho_s \frac{\hbar}{m} R_0 dR_0$$

(с логарифмической точностью, при дифференцировании следует считать большой логарифм постоянным), и затем

$$\rho = 2\pi^2 \rho_s \frac{\hbar}{m} R_0^2. \quad (3)$$

Формулы (2), (3) определяют в параметрическом виде (параметр  $R_0$ ) зависимость  $\epsilon(\rho)$  для вихревых колец.

Отметим, что ввиду логарифмического характера интегрирования, приводящего к формуле (1), эта формула (с некоторым изменением обозначений в ней) остается справедливой и для скорости  $v$  перемещения каждого данного элемента искривленной вихревой нити любой формы:

$$v = \frac{\kappa}{2R_0} \mathbf{b} \ln \frac{\lambda}{a}. \quad (4)$$

Здесь  $\mathbf{b}$  — единичный вектор, перпендикулярный касательной плоскости в данной точке нити (вектор бинормали);  $R_0$  — радиус кривизны нити в этой же точке;  $\lambda$  — характерное расстояние, на котором меняется кривизна нити.

2. Найти закон дисперсии малых колебаний прямолинейной вихревой нити (W. Thomson, 1880).

Решение. Выбираем линию нити в качестве оси  $z$ , и пусть вектор  $\mathbf{r} = (x, y)$  дает отклонение точек нити при ее колебаниях; он является функцией  $z$  и времени  $t$  вида  $\exp[i(kz - \omega t)]$ . Скорость точек нити дается формулой (4), в которой под  $\lambda$  надо в данном случае понимать длину волны колебаний ( $\lambda \sim 1/k$ )

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -i\omega \mathbf{r} = \frac{\kappa}{2} \ln \frac{1}{ak} \frac{\mathbf{b}}{R_0}.$$

Вектор бинормали  $\mathbf{b} = [\mathbf{t}\mathbf{n}]$ , где  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{n}$  — единичные векторы касательной и главной нормали к кривой. Согласно известной формуле дифференциальной геометрии,  $d^2\mathbf{r}/dl^2 = \mathbf{n}/R_0$ , где  $l$  — длина, отсчитываемая вдоль кривой. При малых колебаниях нить слабо изогнута, так что можно положить  $l \approx z$  и  $\mathbf{t} = \mathbf{n}_z$  (единичный вектор вдоль оси  $z$ ); тогда

$$\frac{\mathbf{b}}{R_0} \approx \left[ \mathbf{n}_z \frac{d^2\mathbf{r}}{dz^2} \right] = -k^2 [\mathbf{n}_z \mathbf{r}].$$

Таким образом, находим уравнение движения нити

$$-i\omega \mathbf{r} = -\frac{\kappa k^2}{2} [\mathbf{n}_z \mathbf{r}] \ln \frac{1}{ak}.$$

В раскрытом виде оно дает систему двух линейных однородных уравнений для  $x$  и  $y$ ; приравняв нулю определитель этой системы, получим искомую связь между  $\omega$  и  $k$ :

$$\omega = \frac{\kappa k^2}{2} \ln \frac{1}{ak}.$$

### § 30. Вихревая нить в почти идеальном бозе-газе

Как уже упоминалось, толщина самой вихревой нити в жидкости измеряется атомными расстояниями. Исключение в этом отношении представляет, однако, случай почти идеального бозе-газа. Здесь «сердцевина» вихревой нити, в которой свойства среды существенно изменены, имеет (как мы увидим ниже) макроскопическую толщину, и ее структура может быть описана макроскопическим образом (В. Л. Гинзбург, Л. П. Питаевский, 1958; Л. П. Питаевский, 1961; E. P. Gross, 1961).

Рассмотрим слабо неидеальный газ при абсолютном нуле температуры. В таком газе почти все его частицы находятся в конденсатном состоянии. В терминах  $\psi$ -операторов это значит, что «надконденсатная» часть оператора ( $\hat{\Psi}'$ ) мала по сравнению с его средним значением, т. е. по сравнению с конденсатной волновой функцией  $\Xi$ . Если пренебречь этой малой частью вовсе, то функция  $\Xi$  будет удовлетворять тому же «уравнению Шредингера» (7,8), которое имеет место для полного оператора  $\hat{\Psi}$ . С учетом лишь парных взаимодействий оно имеет вид (для бесспиновых частиц)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Xi(t, \mathbf{r}) = - \left( \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \mu \right) \Xi(t, \mathbf{r}) + \Xi(t, \mathbf{r}) \int |\Xi(t, \mathbf{r}')|^2 U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3x'. \quad (30,1)$$

Считая функцию  $\Xi(t, \mathbf{r}')$  мало меняющейся на атомных расстояниях, мы можем вынести ее (заменив на  $\Xi(t, \mathbf{r})$ ) из-под знака интеграла, который сводится тогда к  $\int U(\mathbf{r}) d^3x \equiv U_0$ . Подставив также значение  $\mu = nU_0$  (см. (25,6);  $n$  — невозмущенное значение плотности числа частиц в газе), получим уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Xi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Xi + U_0 \{ \Xi |\Xi|^2 - n \Xi \}. \quad (30,2)$$

В стационарном состоянии  $\Xi$  не зависит от времени<sup>1)</sup>. Пря-

<sup>1)</sup> Напомним, что уравнение (30,1) уже отвечает гамильтониану  $\hat{H}' = \hat{H} - \hat{N}\mu$