

В раскрытом виде оно дает систему двух линейных однородных уравнений для x и y ; приравняв нулю определитель этой системы, получим искомую связь между ω и k :

$$\omega = \frac{\kappa k^2}{2} \ln \frac{1}{ak}.$$

§ 30. Вихревая нить в почти идеальном бозе-газе

Как уже упоминалось, толщина самой вихревой нити в жидкости измеряется атомными расстояниями. Исключение в этом отношении представляет, однако, случай почти идеального бозе-газа. Здесь «сердцевина» вихревой нити, в которой свойства среды существенно изменены, имеет (как мы увидим ниже) макроскопическую толщину, и ее структура может быть описана макроскопическим образом (В. Л. Гинзбург, Л. П. Питаевский, 1958; Л. П. Питаевский, 1961; E. P. Gross, 1961).

Рассмотрим слабо неидеальный газ при абсолютном нуле температуры. В таком газе почти все его частицы находятся в конденсатном состоянии. В терминах ψ -операторов это значит, что «надконденсатная» часть оператора ($\hat{\Psi}'$) мала по сравнению с его средним значением, т. е. по сравнению с конденсатной волновой функцией Ξ . Если пренебречь этой малой частью вовсе, то функция Ξ будет удовлетворять тому же «уравнению Шредингера» (7,8), которое имеет место для полного оператора $\hat{\Psi}$. С учетом лишь парных взаимодействий оно имеет вид (для бесспиновых частиц)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Xi(t, \mathbf{r}) = - \left(\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + \mu \right) \Xi(t, \mathbf{r}) + \Xi(t, \mathbf{r}) \int |\Xi(t, \mathbf{r}')|^2 U(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d^3x'. \quad (30,1)$$

Считая функцию $\Xi(t, \mathbf{r}')$ мало меняющейся на атомных расстояниях, мы можем вынести ее (заменив на $\Xi(t, \mathbf{r})$) из-под знака интеграла, который сводится тогда к $\int U(\mathbf{r}) d^3x \equiv U_0$. Подставив также значение $\mu = nU_0$ (см. (25,6); n — невозмущенное значение плотности числа частиц в газе), получим уравнение

$$i\hbar \frac{\partial \Xi}{\partial t} = - \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Xi + U_0 \{ \Xi |\Xi|^2 - n \Xi \}. \quad (30,2)$$

В стационарном состоянии Ξ не зависит от времени¹⁾. Пря-

¹⁾ Напомним, что уравнение (30,1) уже отвечает гамильтониану $\hat{H}' = \hat{H} - \hat{N}\mu$!

молинейной вихревой нити соответствует решение вида

$$\Xi = \sqrt{n} e^{i\varphi} f\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad r_0 = \frac{\hbar}{\sqrt{2mU_0 n}}, \quad (30,3)$$

где r и φ — расстояние до оси вихря и полярный угол вокруг нее. Фаза этой функции отвечает значению циркуляции (29,7).

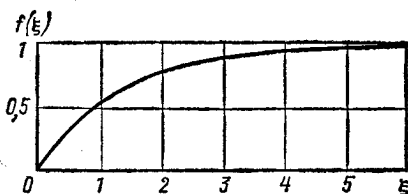


Рис. 4.

Квадрат $|\Xi|^2$ есть плотность числа частиц в конденсате; в рассматриваемом приближении она совпадает с полной плотностью газа. При $r \rightarrow \infty$ последняя должна стремиться к заданному значению n , а функция f — соответственно к 1.

Введя безразмерную переменную $\xi = r/r_0$, получим для функции $f(\xi)$ уравнение

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{df}{d\xi} \right) - \frac{f}{\xi^2} + f - f^3 = 0. \quad (30,4)$$

На рис. 4 показано решение, полученное из (30,4) численным интегрированием. При $\xi \rightarrow 0$ оно обращается в нуль пропорционально ξ , а при $\xi \rightarrow \infty$ стремится к 1 по закону $f = 1 - 1/2\xi^2$.

Параметр r_0 определяет порядок величины радиуса «сердцевины» вихря. Введя вместо U_0 длину рассеяния, согласно $U_0 = 4\pi\hbar^2 a/m$ (6,2), найдем, что

$$r_0 \sim n^{-1/3} \eta^{-1/2} \gg n^{-1/3},$$

где $\eta = an^{1/3}$ — газовый параметр. Этот радиус, таким образом, действительно велик по сравнению с межатомными расстояниями, если газовый параметр достаточно мал.

Задача

Найти спектр элементарных возбуждений в почти идеальном бозе-газе, рассматривая его как закон дисперсии малых колебаний конденсатной волновой функции.

Решение. Рассматриваем малые колебания Ξ вокруг постоянного среднего значения \sqrt{n} :

$$\Xi = \sqrt{n} + A e^{i(kr - \omega t)} + B^* e^{-i(kr - \omega t)}$$

где A, B^* — малые комплексные амплитуды. Подставив это выражение в уравнение (30,2), линеаризовав его и отделив члены с различными экспоненциальными множителями, получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned}\hbar\omega A &= \frac{p^2}{2m} A + nU_0(A+B), \\ -\hbar\omega B &= \frac{p^2}{2m} B + nU_0(A+B)\end{aligned}$$

($p = \hbar k$). Отсюда, приравняв нулю определитель системы, найдем

$$(\hbar\omega)^2 = \left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 + \frac{p^2}{m} nU_0,$$

что совпадает с (25,10).

§ 31. Гриновские функции бозе-жидкости¹⁾

Математический аппарат функций Грина бозе-жидкости строится во многом подобно аналогичному аппарату для ферми-систем. Не повторяя заново всех рассуждений, мы приведем здесь сначала основные определения и формулы, подчеркнем при этом отличия, связанные как с другой статистикой частиц, так и с наличием конденсата²⁾. Как и в предыдущих параграфах этой главы, частицы жидкости предполагаются бесспиновыми.

При определении гриновской функции бозе-жидкости следует выделить из гейзенберговских ψ -операторов конденсатную часть, представив их в виде (26,4). Функция Грина определяется по надконденсатной части операторов согласно

$$G(X_1, X_2) = -i \langle T \hat{\Psi}'(X_1) \hat{\Psi}'^+(X_2) \rangle, \quad (31,1)$$

где снова скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по основному состоянию системы, а T — знак хронологического произведения. При этом, однако, в отличие от случая фермионов, перестановка ψ -операторов для приведения их в нужное расположение не должна сопровождаться изменением знака произведения, так что (в отличие от (7,10))

$$iG(X_1, X_2) = \begin{cases} \langle \hat{\Psi}'(X_1) \hat{\Psi}'^+(X_2) \rangle, & t_1 > t_2, \\ \langle \hat{\Psi}'^+(X_2) \hat{\Psi}'(X_1) \rangle, & t_1 < t_2. \end{cases} \quad (31,2)$$

Такое же среднее значение, как (31,1), но с полными ψ -опера-торами вместо надконденсатных дало бы

$$-i \langle T \hat{\Psi}(X_1) \hat{\Psi}^+(X_2) \rangle = -in_0 + G(X_1, X_2), \quad (31,3)$$

¹⁾ В §§ 31—33, 35 используется система единиц, в которой $\hbar = 1$.

²⁾ Применение математической техники гриновских функций к бозе-системам с конденсатом принадлежит С. Т. Беллеву (1958).