где A, B^* — малые комплексные амплитуды. Подставив это выражение в уравнение (30,2), линеаризовав его и отделив члены с различными экспоненциальными множителями, получим систему двух уравнений

$$\hbar\omega A=\frac{p^2}{2m}A+nU_0(A+B),$$
$$-\hbar\omega B=\frac{p^2}{2m}B+nU_0(A+B)$$

($p=\hbar k$). Отсюда, приравняв нулю определитель системы, найдем

$$(\hbar\omega)^2=\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2+\frac{p^2}{m}nU_0,$$

что совпадает с (25,10).

§ 31. Гриновские функции бозе-жидкости[1]

Математический аппарат функций Грина бозе-жидкости строится во многом подобно аналогичному аппарату для ферми-систем. Не повторяя заново всех рассуждений, мы приведем здесь сначала основные определения и формулы, подчеркнув при этом отличия, связанные как с другой статистикой частиц, так и с наличием конденсата[2]). Как и в предыдущих параграфах этой главы, частицы жидкости предполагаются бесспиновыми.

При определении гриновской функции бозе-жидкости следует выделить из гейзенберговских ψ-операторов конденсатную часть, представив их в виде (26,4). Функция Грина определяется по надконденсатной части операторов согласно

$$G(X_1,\ X_2)=-i\langle \mathrm{T}\hat{\Psi}'(X_1)\hat{\Psi}'^+(X_2)\rangle, \tag{31,1}$$

где снова скобки $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение по основному состоянию системы, а Т — знак хронологического произведения. При этом, однако, в отличие от случая фермионов, перестановка ψ-операторов для приведения их в нужное расположение не должна сопровождаться изменением знака произведения, так что (в отличие от (7,10))

$$iG(X_1,\ X_2)=\begin{cases}\langle\hat{\Psi}'(X_1)\ \hat{\Psi}'^+(X_2)\rangle, & t_1>t_2,\\ \langle\hat{\Psi}'^+(X_2)\hat{\Psi}'(X_1)\rangle, & t_1<t_2.\end{cases} \tag{31,2}$$

Такое же среднее значение, как (31,1), но с полными ψ-операторами вместо надконденсатных дало бы

$$-i\langle \mathrm{T}\hat{\Psi}(X_1)\hat{\Psi}^+(X_2)\rangle=-in_0+G(X_1,\ X_2), \tag{31,3}$$

[1]) В §§ 31—33, 35 используется система единиц, в которой $\hbar=1$.

[2]) Применение математической техники гриновских функций к бозе-системам с конденсатом принадлежит *С. Т. Беляеву* (1958).

где n_0 — плотность числа частиц в конденсате[1]). В однородной жидкости функция G зависит, конечно, только от разности $X = X_1 - X_2$.

Надконденсатная матрица плотности ρ' выражается через функцию Грина согласно

$$N\rho'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = iG(t_1, \mathbf{r}_1; t_1 + 0, \mathbf{r}_2) = iG(t = -0, \mathbf{r}) \qquad (31,4)$$

(обратим внимание на другой общий знак по сравнению с (7,19)). В частности, при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ отсюда получается полная плотность числа надконденсатных частиц

$$\frac{N}{V} - n_0 = iG(t = -0, \mathbf{r} = 0) \qquad (31,5)$$

(ср. (7,19)).

Переход к импульсному представлению происходит по тем же формулам (7,21—22). Нормировка функции $G(\omega, \mathbf{p})$ выражается формулой

$$\frac{N}{V} = n_0 + i \lim_{t \to -0} \int G(\omega, \mathbf{p}) e^{-i\omega t} \frac{d\omega\, d^3p}{(2\pi)^4} \qquad (31,6)$$

(ср. (7,24)).

Для функции Грина бозе-системы в импульсном представлении можно получить разложение, подобное тому, которое было получено в § 8 для ферми-систем. Полностью аналогичные вычисления приводят сначала к формуле

$$G(\omega, \mathbf{p}) = (2\pi)^3 \sum_m \left\{ \frac{A_m \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}_m)}{\omega + E_0(N) - E_m(N+1) + \mu + i0} - \frac{B_m \delta(\mathbf{p} + \mathbf{P}_m)}{\omega - E_0(N) + E_m(N-1) + \mu - i0} \right\}, \qquad (31,7)$$

где

$$A_m = |\langle 0 | \hat{\psi}'(0) | m \rangle|^2, \quad B_m = |\langle m | \hat{\psi}'(0) | 0 \rangle|^2$$

($\hat{\psi}'(\mathbf{r})$ — шредингеровский надконденсатный оператор)[2]). Для приведения этого разложения к окончательному виду замечаем, что энергии возбуждения $\varepsilon_m(N)$ в бозе-системе определяются как (всегда положительные) разности между энергиями возбужденных состояний системы и энергией ее основного состояния при неизменном числе частиц N. Учитывая, что $E_0(N) + \mu \approx$

---

[1]) Как и для ферми-систем, мы будем рассматривать состояния бозе-системы при заданном значении химического потенциала μ (а не числа N). Соответственно роль гамильтониана системы играет разность $\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N}$ (7,1). При этом конденсатная часть ψ-оператора от времени не зависит.

[2]) Формула (31,7) отвечает формуле (8,7). Множитель 1/2 отсутствует теперь в связи с бесспиновостью частиц. Обратим внимание на другой знак перед вторым членом в (31,7) по сравнению с (8,7).

$\approx E_0(N+1)$, находим поэтому, что

$$E_m(N+1)-E_0(N)-\mu \approx E_m(N+1)-E_0(N+1)=\varepsilon_m(N+1)>0,$$
$$E_m(N-1)-E_0(N)+\mu \approx E_m(N-1)-E_0(N-1)=\varepsilon_m(N-1)>0.$$

Но добавление или удаление одной частицы меняет свойства системы лишь в членах относительного порядка $\sim 1/N$; для макроскопической системы эти члены пренебрежимо малы, так что энергии возбуждения $\varepsilon_m(N\pm 1)$ следует считать совпадающими друг с другом и с $\varepsilon_m(N)$. Таким образом, окончательно находим

$$G(\omega, \mathbf{p})=(2\pi)^3\sum_m\left\{\frac{A_m\delta_m(\mathbf{p}-\mathbf{P}_m)}{\omega-\varepsilon_m+i0}-\frac{B_m\delta_m(\mathbf{p}+\mathbf{P}_m)}{\omega+\varepsilon_m-i0}\right\}. \quad (31,8)$$

Тем же способом, как было получено (8,14), отсюда легко найти, что для бозе-систем мнимая часть функции Грина всегда отрицательна:

$$\operatorname{Im} G(\omega, \mathbf{p})<0. \quad (31,9)$$

Асимптотический вид функции Грина при $\omega\to\infty$ остается тем же, что и в случае ферми-систем:

$$G(\omega, \mathbf{p})\to 1/\omega \text{ при } |\omega|\to\infty \quad (31,10)$$

(ср. (8,15)). При его выводе следует учесть правило коммутации

$$\hat{\Psi}(t, \mathbf{r}_1)\hat{\Psi}^+(t, \mathbf{r}_2)-\hat{\Psi}^+(t, \mathbf{r}_2)\hat{\Psi}(t, \mathbf{r}_1)=\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2),$$

в котором стоит теперь коммутатор операторов $\hat{\Psi}$ и $\hat{\Psi}^+$ вместо антикоммутатора [1]).

Далее, такие же рассуждения, что и в § 8, приводят к основному результату о том, что полюсы функции Грина определяют спектр элементарных возбуждений

$$G^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p})=0, \quad (31,11)$$

причем следует брать только положительные корни этого уравнения; в отличие от (8,16), вычитать μ из ε здесь не требуется.

Вблизи своего полюса функция Грина имеет вид

$$G(\omega, \mathbf{p})\approx\frac{Z_\pm}{\omega\mp\varepsilon(\mathbf{p})}, \quad Z_+>0, \quad Z_-<0; \quad (31,12)$$

знак вычета в полюсе совпадает со знаком ω, как это следует из положительности коэффициента A_m, B_m в (31,8) (величина же вычета не ограничена никакими условиями, подобными, например, условию (10,4) в случае ферми-систем). Используя

---

[1]) Тот факт, что в определении G выделена конденсатная часть ψ-операторов, здесь несуществен: постоянному члену $-in_0$ в (31,3) в импульсном представлении отвечает δ-функция $\delta(\omega)\,\delta(\mathbf{p})$, не отражающаяся на (31,10).

выражение (31,12), легко убедиться (подобно тому, как это было сделано в § 8), что неравенство (31,9) автоматически обеспечивает положительность коэффициента затухания квазичастиц, т. е. нужный знак $-\operatorname{Im}\varepsilon > 0$, когда значения ε сдвигаются в комплексную область.

Возможность перехода надконденсатных частиц в конденсат и обратно приводит к тому, что в математическом аппарате функций Грина для бозе-систем наряду с функцией (31,1) автоматически появляются (как мы увидим в § 33) также и функции

$$iF(X_1, X_2) = \langle N-2 | \mathrm{T}\hat{\Psi}'(X_1)\hat{\Psi}'(X_2) | N \rangle, \tag{31,13}$$

$$iF^+(X_1, X_2) = \langle N | \mathrm{T}\hat{\Psi}'^+(X_1)\hat{\Psi}'^+(X_2) | N-2 \rangle = \\ = \langle N+2 | \mathrm{T}\hat{\Psi}'^+(X_1)\hat{\Psi}'^+(X_2) | N \rangle, \tag{31,14}$$

где матричный элемент берется для переходов с изменением полного числа частиц в системе, а символ $|N\rangle$ означает основное состояние системы с N частицами (последнее равенство в (31,14) справедливо с точностью до величин $\sim 1/N$ — ср. примечание на стр. 130). Определенные таким образом функции F и F^+ называют *аномальными функциями Грина*. Покажем, что в однородной и неподвижной жидкости функции F и F^+ совпадают друг с другом.

Как и функция G, функции F и F^+ для однородной жидкости зависят только от разности $X = X_1 - X_2$[1]). При этом, поскольку перестановка X_1 и X_2 меняет лишь порядок расположения операторов в произведении, который все равно устанавливается операцией хронологизации, то

$$F(X) = F(-X). \tag{31,15}$$

Отсюда следует, конечно, что и в импульсном представлении F — четная функция своего аргумента

$$F(P) = F(-P). \tag{31,16}$$

Далее, определенное соотношение между F и F^+ возникает как результат следующего свойства гейзенберговского ψ-оператора

---

[1]) Независимость функции F от суммы времен $t_1 + t_2$ связана с тем, что в определение гамильтониана $\hat{H}' = \hat{H} - \mu\hat{N}$ включен член $-\mu\hat{N}$. Тем самым из разности собственных значений энергии систем с различными числами частиц исключен член

$$E(N+2) - E(N) \approx 2\partial E/\partial N = 2\mu,$$

а из матричных элементов оператора $\hat{\Psi}'_1\hat{\Psi}'_2$ соответственно исключен множитель $\exp[-i\mu(t_1 + t_2)]$.

неподвижной жидкости[1]):

$$\hat{\Psi}^{+}(t, \mathbf{r}) = \tilde{\hat{\Psi}}(-t, -\mathbf{r}). \qquad (31,17)$$

Полагая, скажем, $t_2 > t_1$, имеем поэтому

$$\begin{aligned} iF^{+}(X_1, X_2) &= \langle N+2 \,|\, \hat{\Psi}'^{+}(X_2)\hat{\Psi}'^{+}(X_1) \,|\, N\rangle = \\ &= \langle N \,|\, \tilde{\hat{\Psi}}'^{+}(X_1)\tilde{\hat{\Psi}}'^{+}(X_2) \,|\, N+2\rangle = \\ &= \langle N \,|\, \hat{\Psi}'(-X_1)\hat{\Psi}'(-X_2) \,|\, N+2\rangle = iF(-X_1, -X_2), \end{aligned}$$

или $F^{+}(X) = F(-X)$. С учетом (31,15) отсюда следует искомое равенство

$$F^{+}(X) = F(X). \qquad (31,18)$$

Выразив функцию $F(X)$ через матричные элементы ψ-операторов, можно получить для $F(\omega, \mathbf{p})$ разложение, аналогичное разложению (31,8), и тем самым выяснить вопрос о полюсах этой функции; мы не будем останавливаться здесь на этом. Укажем лишь, что полюсы функции $F(\omega, \mathbf{p})$ совпадают с полюсами функции $G(\omega, \mathbf{p})$.

В заключение этого параграфа вычислим функцию Грина идеального бозе-газа $G^{(0)}$. Заметим прежде всего, что поскольку в основном состоянии такого газа все частицы находятся в конденсате, то надконденсатный оператор уничтожения частиц $\hat{\Psi}'$ при воздействии на волновую функцию основного состояния обращает ее в нуль. Поэтому функция $G^{(0)}(t, \mathbf{r})$ отлична от нуля

[1]) В нем можно убедиться следующим образом. Все отличные от нуля матричные элементы операторов $\hat{a}_{\mathbf{p}}$, $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}$ могут быть определены как вещественные величины (см. III (64,7—8)); в этом смысле операторы вещественны, т. е. $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+} \equiv \tilde{\hat{a}}_{\mathbf{p}}^{*} = \tilde{\hat{a}}_{\mathbf{p}}$. Поэтому шредингеровский ψ-оператор

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = V^{-1/2} \sum_{\mathbf{p}} \hat{a}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}$$

обладает свойством $\hat{\psi}^{+}(\mathbf{r}) = \tilde{\hat{\psi}}(-\mathbf{r})$. Отсюда, в свою очередь, следует равенство (31,17) для гейзенберговского оператора

$$\hat{\Psi}(t, \mathbf{r}) = \exp(i\hat{H}t)\hat{\psi}(\mathbf{r})\exp(-i\hat{H}t),$$

в чем легко убедиться, заметив, что (для системы без спиновых взаимодействий) гамильтониан $\hat{H}$ веществен (так что $\hat{H}^{+} = \hat{H}$), а в силу изотропии системы $\hat{H}(-\mathbf{r}) = \hat{H}(\mathbf{r})$. Подчеркнем, однако, что вещественность гамильтониана подразумевает отсутствие в жидкости макроскопического сверхтекучего движения. Для бозе-системы с конденсатом гамильтониан зависит от макроскопического параметра — конденсатной волновой функции Ξ. В движущейся жидкости этот параметр комплексен, а с ним комплексен (но, разумеется, эрмитов) и гамильтониан.

только при $t=t_1-t_2>0$ (когда, согласно (31,2), первым действует оператор рождения $\hat{\Psi}'^{+}$).

Хотя для идеального газа химический потенциал $\mu=0$, мы не будем полагать здесь этого, рассматривая μ как не определенный заранее свободный параметр; это необходимо для дальнейшего применения функции $G^{(0)}$ в диаграммной технике для произвольной жидкости, где μ играет роль именно такого параметра. Соответственно этому, оператор $\hat{\Psi}'_0(t, \mathbf{r})$ будем писать в виде

$$\hat{\Psi}'_0(t, \mathbf{r})=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{p}\neq 0}\hat{a}_{\mathbf{p}}\exp\left[i\left(\mathbf{pr}-\frac{p^2}{2m}t+\mu t\right)\right] \tag{31,19}$$

(отличающимся от (26,1) членом $i\mu t$ в показателях экспонент). При подставке этого выражения в определение $G^{(0)}$, согласно (31,2), замечаем, что при усреднении (т. е. взятии диагонального матричного элемента) могут дать отличный от нуля результат лишь произведения $\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}$ и $\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}\hat{a}_{\mathbf{p}}$; но поскольку в основном состоянии газа числа заполнения всех состояний частиц с $\mathbf{p}\neq 0$ равны нулю, то

$$\langle\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}\hat{a}_{\mathbf{p}}\rangle=0, \quad \langle\hat{a}_{\mathbf{p}}\hat{a}_{\mathbf{p}}^{+}\rangle=1.$$

Перейдя затем обычным образом от суммирования по $\mathbf{p}$ к интегрированию, получим

$$G^{(0)}(t, \mathbf{r})=\begin{cases}-i\int\exp\left[-i\frac{p^2}{2m}+i\mu t+i\mathbf{pr}\right]\frac{d^3p}{(2\pi)^3} & \text{при } t>0,\\ 0 \quad \text{при} \quad t<0.\end{cases} \tag{31,20}$$

Отсюда для функции Грина в импульсном представлении имеем

$$G^{(0)}(\omega, \mathbf{p})=-i\int_0^\infty\exp\left(-i\frac{p^2}{2m}t+i\mu t+i\omega t\right)dt.$$

Интегрирование осуществляется с помощью формулы

$$\int_0^\infty e^{i\alpha t}dt=\frac{i}{\alpha+i0} \tag{31,21}$$

(в подынтегральное выражение вводится множитель $e^{-\lambda t}$ с $\lambda>0$, после чего переходим к пределу $\lambda\to 0$). Окончательно

$$G^{(0)}(\omega, \mathbf{p})=\left[\omega-\frac{p^2}{2m}+\mu+i0\right]^{-1}. \tag{31,22}$$

Что касается функции F, то для идеального газа $F^{(0)}(X)=0$, как это очевидно из определения (31,13), в котором оба оператора уничтожают надконденсатные частицы. Поэтому и в импульсном представлении

$$F^{(0)}(\omega,\ \mathbf{p})=0. \tag{31,23}$$

Этим равенством выражается тот факт, что надконденсатные частицы появляются (при $T=0$) только в результате взаимодействия.

Задача

Найти функцию Грина фононного поля, определяемую как

$$D(X_1,\ X_2)\equiv D(X_1-X_2) = -i\langle T\hat{\rho}'(X_1)\hat{\rho}'(X_2)\rangle, \tag{1}$$

где угловые скобки означают усреднение по основному состоянию поля; $\hat{\rho}'$ — оператор плотности из (24,10), а хронологическое произведение раскрывается по правилу (31,2).

Решение. При подстановке (24,10) в определение (1) замечаем, что поскольку в основном состоянии все числа заполнения фононных состояний равны нулю, то отличны от нуля лишь средние значения $\langle\hat{c}_{\mathbf{k}}\hat{c}_{\mathbf{k}}^{+}\rangle=1$. Перейдя затем от суммирования по $\mathbf{k}$ к интегрированию, получим

$$D(t,\ \mathbf{r})=\int\frac{\rho k}{2iu}\, e^{i(\mathbf{kr}\mp ukt)}\,\frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

где знаки $-$ и $+$ в показателе относятся соответственно к $t>0$ и $t<0$ (в интеграле для $t<0$ произведено переобозначение переменной интегрирования $\mathbf{k}\longrightarrow-\mathbf{k}$). Подынтегральное выражение (без множителя $e^{i\mathbf{kr}}$) есть уже компонента фурье-разложения функции $D(t,\ \mathbf{r})$ по координатам. Разлагая так же и по времени, получим гриновскую функцию в импульсном представлении

$$D(\omega,\ \mathbf{k})=\frac{\rho k}{2iu}\left\{\int\limits_0^{\infty} e^{i(\omega-uk)t}\,dt+\int\limits_{-\infty}^{0} e^{i(\omega+uk)t}\,dt\right\}.$$

Интегрирование осуществляется с помощью формулы (31,21):

$$D(\omega,\ \mathbf{k})=\frac{\rho k}{2u}\left[\frac{1}{\omega-uk+i0}-\frac{1}{\omega+uk-i0}\right]=\frac{\rho k^2}{\omega^2-u^2k^2+i0}.$$

§ 32. Диаграммная техника для бозе-жидкости

Дальнейшее построение диаграммной техники для вычисления функций Грина бозе-системы производится подобно тому, как это было сделано в §§ 12—13 для ферми-систем. Как и там, сформулируем правила этой техники для систем с парным взаимодействием между частицами, описывающимся оператором

$$\hat{V}(t)=\frac{1}{2}\int\hat{\Psi}^{+}(t,\ \mathbf{r}_1)\,\hat{\Psi}^{+}(t,\ \mathbf{r}_2)\,U(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\,\hat{\Psi}(t,\ \mathbf{r}_2)\,\hat{\Psi}(t,\ \mathbf{r}_1)\,d^3x_1\,d^3x_2. \tag{32,1}$$