

пульсном представлении

$$F^{(0)}(\omega, \mathbf{p}) = 0. \quad (31,23)$$

Этим равенством выражается тот факт, что надконденсатные частицы появляются (при $T=0$) только в результате взаимодействия.

Задача

Найти функцию Грина фононного поля, определяемую как

$$D(X_1, X_2) \equiv D(X_1 - X_2) = -i \langle T \hat{\rho}'(X_1) \hat{\rho}'(X_2) \rangle, \quad (1)$$

где угловые скобки означают усреднение по основному состоянию поля; $\hat{\rho}'$ — оператор плотности из (24,10), а хронологическое произведение раскрывается по правилу (31,2).

Решение. При подстановке (24,10) в определение (1) замечаем, что поскольку в основном состоянии все числа заполнения фононных состояний равны нулю, то отличны от нуля лишь средние значения $\langle \hat{c}_k \hat{c}_k^\dagger \rangle = 1$. Перейдя затем от суммирования по k к интегрированию, получим

$$D(t, \mathbf{r}) = \int \frac{\rho k}{2iu} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} \mp ukt)} \frac{d^3k}{(2\pi)^3},$$

где знаки $-$ и $+$ в показателе относятся соответственно к $t > 0$ и $t < 0$ (в интеграле для $t < 0$ произведено переобозначение переменной интегрирования $k \rightarrow -k$). Подынтегральное выражение (без множителя $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$) есть уже компонента фурье-разложения функции $D(t, \mathbf{r})$ по координатам. Разлагая так же и по времени, получим гриновскую функцию в импульсном представлении

$$D(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\rho k}{2iu} \left\{ \int_0^\infty e^{i(\omega - uk)t} dt + \int_{-\infty}^0 e^{i(\omega + uk)t} dt \right\}.$$

Интегрирование осуществляется с помощью формулы (31,21):

$$D(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\rho k}{2u} \left[\frac{1}{\omega - uk + i0} - \frac{1}{\omega + uk - i0} \right] = \frac{\rho k^2}{\omega^2 - u^2 k^2 + i0}.$$

§ 32. Диаграммная техника для бозе-жидкости

Дальнейшее построение диаграммной техники для вычисления функций Грина бозе-системы производится подобно тому, как это было сделано в §§ 12—13 для ферми-систем. Как и там, сформулируем правила этой техники для систем с парным взаимодействием между частицами, описываемым оператором

$$\hat{V}(t) = \frac{1}{2} \int \hat{\Psi}^+(t, \mathbf{r}_1) \hat{\Psi}^+(t, \mathbf{r}_2) U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(t, \mathbf{r}_2) \hat{\Psi}(t, \mathbf{r}_1) d^3x_1 d^3x_2. \quad (32,1)$$

Специфика бозе-жидкостей с конденсатом состоит прежде всего в том, что все гейзенберговские ψ -операторы должны быть представлены в виде $\hat{\Psi} = \hat{\Psi}' + \Xi$, где $\hat{\Psi}'$ — его надконденсатная часть, а Ξ — конденсатная волновая функция, представляющая собой (для неподвижной жидкости) просто вещественное число $\sqrt{n_0}$ ¹⁾. После такой подстановки оператор (32,1) распадается на ряд членов, содержащих от четырех до нуля операторов $\hat{\Psi}'$ (вместе с соответствующим дополнительным числом множителей $\sqrt{n_0}$).

Все сказанное в § 12 о переходе к представлению взаимодействия остается полностью в силе, а дальнейшее раскрытие получающихся выражений осуществляется с помощью теоремы Вика (с тем лишь отличием, что перестановка ψ -операторов в усредняемом произведении не требует теперь изменения знака). Разнообразие членов, на которые распадается оператор (32,1), приводит, однако, к появлению новых элементов в фейнмановских диаграммах. Опишем эти элементы сразу в окончательном, импульсном представлении.

В каждой вершине диаграммы по-прежнему сходятся три линии: пунктирная линия (которой сопоставляется множитель $-iU(Q)$ с 4-импульсом $Q = (q_0, \mathbf{q})$) и две линии частиц — одна входящая и одна выходящая. Но при этом надо различать конденсатные и надконденсатные частицы. Сплошные линии будут отвечать теперь надконденсатным частицам, и такой линии (с 4-импульсом $P = (\omega, \mathbf{p})$) по-прежнему отвечает множитель $iG^{(0)}(P)$. Линии же конденсатных частиц будем изображать волнистыми; этим линиям приписывается 4-импульс $P = 0$, и им сопоставляется множитель $\sqrt{n_0}$ ²⁾. Таким образом, возникают вершины четырех видов:



(вершины с одной или двумя волнистыми линиями называют *неполными*). В каждой вершине должен выполняться «закон

¹⁾ Подчеркнем, что поскольку эта величина возникает от разделения на части точного (гейзенберговского) ψ -оператора, то n_0 — точное значение плотности конденсата в жидкости (при $T = 0$).

²⁾ Точнее, входящей в вершину волнистой линии должен сопоставляться множитель Ξ , а выходящей — множитель Ξ^* ; ввиду вещественности Ξ эти множители фактически одинаковы.

сохранения 4-импульса»; поэтому в вершинах b и v 4-импульс пунктира совпадает с 4-импульсом сплошной линии, а в вершине z он равен нулю). Волнистые линии всегда являются внешними линиями диаграммы, т. е. присоединены к ней лишь одним из своих концов, второй же конец остается свободным.

Каждая диаграмма, входящая в определение функции Грина $G(P)$, имеет две сплошные внешние линии с 4-импульсами P (входящую и выходящую), а сверх того может иметь некоторое (четное) число волнистых внешних линий; полные числа входящих и выходящих внешних концов во всякой диаграмме одинаковы (чем выражается сохранение полного числа частиц в системе — конденсатных вместе с надконденсатными). Как и для ферми-системы (и по той же причине — см. § 13), допустимы только диаграммы, не распадающиеся на две (или более) не связанные друг с другом части. В отличие от случая ферми-систем, меняется, однако, правило, определяющее общий знак, с которым диаграммы входят в iG : все диаграммы входят с одинаковыми знаками (т. е. устраняется указанное на стр. 70 правило 3).

Каждая из пунктирных линий в диаграмме имеет на своих двух концах полную или неполную вершину. Это не могут, однако, быть две вершины типа (32,2г): не имея ни одного сплошного конца, такая фигура вообще не может быть присоединена к диаграмме функции Грина. Это не могут быть также вершины типов (32,2г) и (32,2в) (или (32,2г) и (32,2б)): при наличии трех волнистых концов сохранение 4-импульса в вершинах привело бы в такой фигуре к обращению в нуль также и 4-импульса четвертого конца, т. е. мы пришли бы к фигуре со всеми четырьмя конденсатными (волнистыми) концами.

Значительное число диаграмм в каждом порядке теории возмущений, построенных по описанным правилам, однако, тождественно обращается в нуль. Причиной этого исчезновения является отсутствие надконденсатных частиц в основном состоянии идеального бозе-газа. Это в особенности ясно видно, если проследить за происхождением диаграмм в координатном представлении: равны нулю все свертки вида $\langle \hat{\Psi}' + \hat{\Psi}' \rangle$, в которых оператор уничтожения надконденсатных частиц стоит справа и действует на основное состояние первым; остаются только свертки вида $\langle \hat{\Psi}' \hat{\Psi}' + \rangle$ ¹⁾.

Так обращаются в нуль диаграммы с «замкнутой на себя» сплошной линией: такая линия возникает от свертки $\langle \hat{\Psi}' + (t, \mathbf{r}) \hat{\Psi}' (t, \mathbf{r}) \rangle$, представляющей плотность надконденсатных

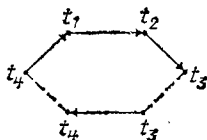
¹⁾ По аналогичной причине обращались в нуль некоторые диаграммы для рассеяния двух частиц в вакууме — ср. § 16.

частиц. Далее, равны нулю диаграммы, содержащие сплошную линию, замкнутую пунктиром:



Такая линия возникает от свертки $\langle \hat{\Psi}'^+(t, \mathbf{r}_2) \hat{\Psi}'(t, \mathbf{r}_1) \rangle$ двух ψ -операторов внутри одного и того же оператора взаимодействия $\hat{V}(t)$, в котором $\hat{\Psi}'^+$ стоят слева от $\hat{\Psi}'$.

Наконец, равны нулю все диаграммы, в которых можно провести замкнутый контур по некоторой последовательности сплошных и пунктирных линий так, что направления сплошных линий вдоль всего контура одинаковы. Изобразим контур такого рода, указав у точек на концах линий временные аргументы ψ -операторов:



Аргументы на концах каждого пунктира одинаковы¹⁾. Аргументы же функций $G^{(0)}$, отвечающих сплошным линиям, равны разностям $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$, $t_4 - t_3$, $t_1 - t_4$; для любого замкнутого контура их сумма будет равна нулю, так что хотя бы один из них отрицателен и соответствующая функция $G^{(0)}$ обратится в нуль.

Описанные правила относятся и к диаграммам, определяющим аномальную функцию Грина, с той лишь разницей, что обе сплошные внешние линии должны быть выходящими (для функции F) или обе входящими (для функции F^+). Соответственно становятся неодинаковыми в этих диаграммах числа входящих и выходящих волнистых линий — так, чтобы общее число всех выходящих линий осталось равным общему числу входящих. Одной из внешних сплошных линий приписывается 4-импульс P , а другой — 4-импульс $-P$ (где P — аргумент искомой функции $F(P)$ или $F^+(P)$)²⁾; сумма 4-импульсов обеих этих линий должна быть равна нулю в силу «закона сохранения 4-импульса», примененного к диаграмме в целом.

Вычисленные по диаграммной технике функции Грина содержат два параметра — химический потенциал μ и плотность конденсата n_0 ; эти параметры надо еще связать с плотностью

¹⁾ Напомним, что в пространственно-временном представлении диаграмм пунктирной линии между точками 1 и 2 сопоставляется множитель $iU(X_1 - X_2)$, содержащий δ -функцию $\delta(t_1 - t_2)$.

²⁾ Поскольку F — четная функция своего аргумента, то выбор общего знака P здесь несуществен.

жидкости $n = N/V$. Одно соотношение между этими тремя величинами дает формула (31,6), следующая непосредственно из определения функции Грина. В качестве второго соотношения можно пользоваться полученным ниже уравнением (33,11), явно выражающим μ в терминах понятий диаграммной техники.

§ 33. Собственно-энергетические функции

Изучим более подробно структуру диаграмм для функций Грина, введя в рассмотрение понятие о *собственно-энергетической функции* подобно тому, как это было сделано в § 14 для ферми-систем: путем рассмотрения совокупности всех диаграмм (с двумя внешними сплошными линиями), которые не могут быть рассеяны на две части пересечением лишь одной сплошной линии. В отличие от § 14, однако, теперь возникают различные возможности в смысле направления внешних линий диаграмм: наряду с диаграммами с одной входящей и одной выходящей линией существуют диаграммы с двумя выходящими или двумя входящими линиями. Соответственно этому, возникают собственно-энергетические части трех родов:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} -i\Sigma_{11} \\ \leftarrow \text{---} \bigcirc \text{---} \rightarrow \\ P \qquad P \end{array} &
 \begin{array}{c} -i\Sigma_{20} \\ \leftarrow \text{---} \bigcirc \text{---} \rightarrow \\ -P \qquad P \end{array} &
 \begin{array}{c} -i\Sigma_{02} \\ \leftarrow \text{---} \bigcirc \text{---} \rightarrow \\ P \qquad -P \end{array}
 \end{array} \quad (33,1)$$

(в этих обозначениях первый индекс у Σ указывает число входящих, а второй—число выходящих внешних сплошных линий). Наряду со сплошными внешними линиями собственно-энергетические диаграммы имеют, вообще говоря, также и волнистые (конденсатные) свободные концы. Эти концы включаются в определение собственно-энергетической функции, изображенной здесь кружком. Мы увидим ниже, что функции $\Sigma_{02}(P)$ и $\Sigma_{20}(P)$ фактически совпадают

$$\Sigma_{02}(P) = \Sigma_{20}(P). \quad (33,2)$$

Сразу же отметим также, что поскольку P и $-P$ входят в определение этих функций симметричным образом, они четны по своему аргументу:

$$\Sigma_{02}(P) = \Sigma_{02}(-P). \quad (33,3)$$

Приведем для иллюстрации все отличные от нуля диаграммы функций Σ_{11} и Σ_{02} в двух первых порядках теории возмущений

$$\begin{array}{c} P \text{---} \bigcirc \text{---} P \\ \leftarrow \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow \text{---} \\ \left| \quad \left| \right. \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \leftarrow \text{---} \\ \left| \quad \left| \quad \left| \right. \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \leftarrow \text{---} \\ \left| \quad \left| \quad \left| \quad \left| \right. \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \leftarrow \text{---} \\ \left| \quad \left| \quad \left| \quad \left| \quad \left| \right. \\ \text{---} \end{array} \quad (33,4)$$

$$\begin{array}{c} P \text{---} \bigcirc \text{---} -P \\ \leftarrow \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} \leftarrow \text{---} \\ \left| \quad \left| \right. \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \leftarrow \text{---} \\ \left| \quad \left| \quad \left| \right. \\ \text{---} \end{array} \quad (33,5)$$