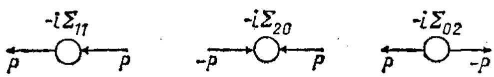
жидкости $n = N/V$. Одно соотношение между этими тремя величинами дает формула (31,6), следующая непосредственно из определения функции Грина. В качестве второго соотношения можно пользоваться полученным ниже уравнением (33,11), явно выражающим μ в терминах понятий диаграммной техники.

§ 33. Собственно-энергетические функции

Изучим более подробно структуру диаграмм для функций Грина, введя в рассмотрение понятие о *собственно-энергетической функции* подобно тому, как это было сделано в § 14 для ферми-систем: путем рассмотрения совокупности всех диаграмм (с двумя внешними сплошными линиями), которые не могут быть рассечены на две части пересечением лишь одной сплошной линии. В отличие от § 14, однако, теперь возникают различные возможности в смысле направления внешних линий диаграмм: наряду с диаграммами с одной входящей и одной выходящей линией существуют диаграммы с двумя выходящими или двумя входящими линиями. Соответственно этому, возникают собственно-энергетические части трех родов:



(33,1)

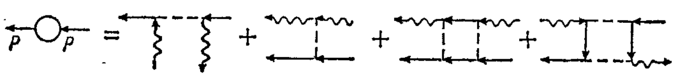
(в этих обозначениях первый индекс у Σ указывает число входящих, а второй — число выходящих внешних сплошных линий). Наряду со сплошными внешними линиями собственно-энергетические диаграммы имеют, вообще говоря, также и волнистые (конденсатные) свободные концы. Эти концы включаются в определение собственно-энергетической функции, изображенной здесь кружком. Мы увидим ниже, что функции $\Sigma_{02}(P)$ и $\Sigma_{20}(P)$ фактически совпадают

$$\Sigma_{02}(P) = \Sigma_{20}(P). \tag{33,2}$$

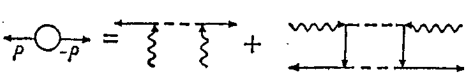
Сразу же отметим также, что поскольку P и $-P$ входят в определение этих функций симметричным образом, они четны по своему аргументу:

$$\Sigma_{02}(P) = \Sigma_{02}(-P). \tag{33,3}$$

Приведем для иллюстрации все отличные от нуля диаграммы функций Σ_{11} и Σ_{02} в двух первых порядках теории возмущений



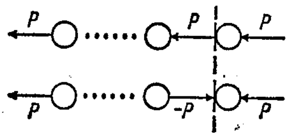
(33,4)



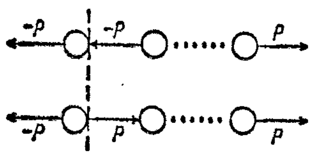
(33,5)

Составим теперь уравнения, выражающие точные функции G и F через собственно-энергетические функции.

В терминах теории возмущений разность $G(P)-G^{(0)}(P)$ выражается суммой бесконечного числа диаграмм—цепочек вида

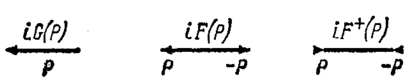


состоящих из различных чисел кружков, соединенных всеми возможными способами стрелками прямого и обратного (по сравнению с двумя крайними) направлений. Аналогичным образом, точная функция F (функция $F^{(0)}\equiv 0$) изобразится суммой цепочек, в которых две крайние стрелки имеют противоположные направления:



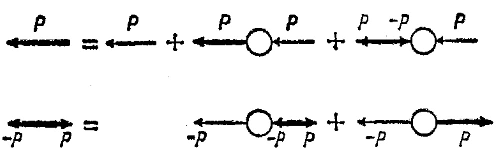
Если отсечь во всех этих цепочках крайнее звено (кружок вместе со стрелкой) как показано вертикальным пунктиром, то совокупность оставшихся диаграмм с одинаковыми направлениями крайних стрелок снова будет совпадать с точной функций G, а совокупность диаграмм с противоположными направлениями крайних стрелок—с точной функцией F.

Введем графическое обозначение этих функций жирными одно- и двусторонними стрелками



(33,6)

Тогда сделанные утверждения запишутся в виде графических равенств, составленных из скелетных диаграмм:



(33,7)

(ср. аналогичное уравнение (14,4)). В аналитическом виде эти равенства дают[1])

$$\begin{aligned} G(P) &= [1+\Sigma_{11}(P)\,G(P)+\Sigma_{20}(P)\,F(P)]\,G^{(0)}(P),\\ F(P) &= G^{(0)}(-P)\,[\Sigma_{11}(-P)\,F(P)+\Sigma_{02}(P)\,G(P)]. \end{aligned} \qquad (33,8)$$

Решив эти уравнения относительно G и F и подставив выражение (31,22) для $G^{(0)}$, получим искомые формулы

$$G(P) = \frac{1}{D}\left[\omega+\frac{p^2}{2m}-\mu+\Sigma_{11}(-P)\right], \quad F(P) = -\frac{1}{D}\Sigma_{02}(P), \qquad (33,9)$$

где

$$D = [\Sigma_{02}(P)]^2 - \\ -\left[\Sigma_{11}(P)-\omega-i0+\frac{p^2}{2m}-\mu\right]\left[\Sigma_{11}(-P)+\omega+i0+\frac{p^2}{2m}-\mu\right]. \qquad (33,10)$$

Подчеркнем, что эти соотношения не зависят от внутренней структуры собственно-энергетических функций, а потому не связаны и с предположением о парности взаимодействий между частицами, так что они верны для любой бозе-жидкости.

Энергия элементарных возбуждений в жидкости в зависимости от импульса $\mathbf{p}$ определяется полюсами функций G и F по отношению к переменной ω. При малых $\mathbf{p}$ эти возбуждения являются фононами и их энергия стремится к нулю вместе с $\mathbf{p}$. Поэтому функция (33,10) должна обращаться в нуль при $\mathbf{p}=0$, $\omega=0$. Отсюда находим равенство

$$[\Sigma_{11}(0)-\mu]^2 = \Sigma_{02}^2(0).$$

Как уравнение по отношению к μ, оно имеет два корня, из которых должен быть выбран

$$\mu = \Sigma_{11}(0) - \Sigma_{02}(0). \qquad (33,11)$$

Действительно, в длинноволновом пределе ψ-оператор дается выражением (27,2) и его надконденсатная часть $\hat\Psi' = \hat\Psi - \sqrt{n_0} \approx i\sqrt{n_0}\,\hat\Phi$, так что $\hat\Psi'^+ = -\hat\Psi'$ и затем $F \approx -G$; последнее равенство выполняется именно при выборе (33,11), когда числители в (33,9) (в пределе $P \to 0$) отличаются только знаком. Равенство (33,11) и есть то второе соотношение (см. конец § 32), которое вместе с соотношением (31,6) дает возможность выразить параметры μ и n_0 через плотность жидкости n.

Дальнейшее разложение выражения (33,10) в ряд по ω и $\mathbf{p}$ определяет вид функции Грина в области малых значений их аргументов. При этом надо учесть, что скалярные функции Σ_{11}

---

[1]) Аналогичную систему уравнений можно было бы написать для G и F^+, причем она отличалась бы от (33,8) лишь заменой Σ_{02} и Σ_{20} друг на друга. Поскольку $F = F^+$, то отсюда следует равенство (33,2).

и Σ_{02} разлагаются по степеням $\mathbf{p}^2$, а разложение четной по всем своим аргументам функции Σ_{02} содержит лишь четные степени также и переменной ω. Представив (33,10) в виде

$$D=\left\{\omega+i0+\frac{1}{2}[\Sigma_{11}(P)-\Sigma_{11}(-P)]\right\}^2-\\-\left\{\frac{p^2}{2m}-\mu+\frac{1}{2}[\Sigma_{11}(P)+\Sigma_{11}(-P)]\right\}^2+\Sigma_{02}^2(P),$$

сразу заключаем, что первые неисчезающие члены разложения имеют вид $D=\mathrm{const}\,(\omega^2-u^2p^2+i0)$, где u — постоянная, представляющая собой, очевидно, скорость звука в жидкости. Заметив также, что в силу (33,11) числители в (33,9) при ω, $\mathbf{p}\to 0$ отличаются только знаком, найдем, что

$$G=-F=\frac{\mathrm{const}}{\omega^2-u^2p^2+i0}.$$

Значение постоянной в числителе можно определить, вычислив по этой гриновской функции импульсное распределение частиц $N(\mathbf{p})$ (при малых $\mathbf{p}$) и сравнив его с известным уже нам распределением (27,7). Интеграл

$$N(\mathbf{p})=i\lim_{t\to-0}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega,\mathbf{p})\,e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}$$

(ср. (7,23)) вычисляется путем замыкания пути интегрирования бесконечно удаленной полуокружностью в верхней полуплоскости (ср. замечание в конце § 7) и соответственно определяется вычетом в полюсе $\omega=-up+i0$. В результате получим $N(\mathbf{p})=\mathrm{const}/2up$ и сравнение с (27,7) дает $\mathrm{const}=n_0mu^2/n$. Таким образом, окончательно находим следующее выражение функций Грина при малых ω и $\mathbf{p}$:

$$G=-F=\frac{n_0mu^2}{n(\omega^2-u^2p^2+i0)}. \qquad (33,12)$$

Отметим, что эта функция совпадает (с точностью до нормировочного коэффициента) с функцией Грина фононного поля (см. задачу в § 31) — вполне естественный результат, поскольку в области малых ω, $\mathbf{p}$ все элементарные возбуждения в бозе-жидкости являются фононами.

Наконец, проиллюстрируем полученные формулы в применении к рассмотренной в § 25 модели почти идеального бозе-газа с парным взаимодействием между частицами. В первом приближении теории возмущений Σ_{11} и Σ_{02} определяются первыми двумя диаграммами (33,4) и первой диаграммой (33,5). Раскрыв их в аналитическом виде, получим

$$\Sigma_{11}=n_0[U_0+U(\mathbf{p})],\quad \Sigma_{02}=n_0U(\mathbf{p}).$$

С той же точностью плотность конденсата n_0 в этих формулах можно заменить полной плотностью газа n. Как было указано в § 25, в этой модели импульсы частиц газа можно считать малыми, соответственно чему фурье-компоненты $U(\mathbf{p})$ можно заменить их значением U_0 при $\mathbf{p}=0$. Тогда

$$\Sigma_{11}=2nU_0, \quad \Sigma_{02}=nU_0. \tag{33,13}$$

Подстановка этих выражений в (33,11) дает $\mu=nU_0$ — в согласии с (25,6). Подстановка же в (33,9—10) приводит к следующим формулам для функций Грина:

$$\begin{aligned} G(\omega, \mathbf{p}) &= \frac{\omega+p^2/2m+nU_0}{\omega^2-\varepsilon^2(p)+i0}, \\ F(\omega, \mathbf{p}) &= \frac{-nU_0}{\omega^2-\varepsilon^2(p)+i0}, \end{aligned} \tag{33,14}$$

где

$$\varepsilon(p)=\left[\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2+\frac{p^2}{m}nU_0\right]^{1/2}.$$

Из вида знаменателей этих функций ясно, что $\varepsilon(p)$ есть энергия элементарных возбуждений — в согласии с полученным ранее другим способом результатом (25,10—11).

§ 34. Распад квазичастиц

Конечная продолжительность жизни (затухание) квазичастицы в квантовой жидкости может быть связана как с ее столкновениями с другими квазичастицами, так и с ее самопроизвольным распадом на две (или более) новые квазичастицы. При температуре $T\to 0$ первый источник затухания исчезает (так как вероятность столкновений стремится к нулю вместе с плотностью числа квазичастиц), и тогда затухание возникает лишь от распада квазичастиц.

Рассмотрим распад квазичастицы (с импульсом $\mathbf{p}$) на две. Если $\mathbf{q}$ — импульс одной из возникающих квазичастиц, то импульс другой есть $\mathbf{p}-\mathbf{q}$, и закон сохранения энергии дает условие

$$\varepsilon(p)=\varepsilon(q)+\varepsilon(|\mathbf{p}-\mathbf{q}|). \tag{34,1}$$

Может оказаться, что в некоторой области значений p это равенство не выполняется ни при каких $\mathbf{q}$; тогда квазичастицы в этой области будут вообще не затухающими (если, конечно, невозможен также и распад на большее число квазичастиц). По мере изменения p затухание возникает при значении $p=p_c$ (порог распада), при котором впервые появляются корни уравнения (34,1).