

С той же точностью плотность конденсата  $n_0$  в этих формулах можно заменить полной плотностью газа  $n$ . Как было указано в § 25, в этой модели импульсы частиц газа можно считать малыми, соответственно чему фурье-компоненты  $U(\mathbf{p})$  можно заменить их значением  $U_0$  при  $\mathbf{p} = 0$ . Тогда

$$\Sigma_{11} = 2nU_0, \quad \Sigma_{02} = nU_0. \quad (33,13)$$

Подстановка этих выражений в (33,11) дает  $\mu = nU_0$  — в согласии с (25,6). Подстановка же в (33,9—10) приводит к следующим формулам для функций Грина:

$$\begin{aligned} G(\omega, \mathbf{p}) &= \frac{\omega + p^2/2m + nU_0}{\omega^2 - \varepsilon^2(p) + i0}, \\ F(\omega, \mathbf{p}) &= \frac{-nU_0}{\omega^2 - \varepsilon^2(p) + i0}, \end{aligned} \quad (33,14)$$

где

$$\varepsilon(p) = \left[ \left( \frac{p^2}{2m} \right)^2 + \frac{p^2}{m} nU_0 \right]^{1/2}.$$

Из вида знаменателей этих функций ясно, что  $\varepsilon(p)$  есть энергия элементарных возбуждений — в согласии с полученным ранее другим способом результатом (25,10—11).

### § 34. Распад квазичастиц

Конечная продолжительность жизни (затухание) квазичастицы в квантовой жидкости может быть связана как с ее столкновениями с другими квазичастицами, так и с ее самопроизвольным распадом на две (или более) новые квазичастицы. При температуре  $T \rightarrow 0$  первый источник затухания исчезает (так как вероятность столкновений стремится к нулю вместе с плотностью числа квазичастиц), и тогда затухание возникает лишь от распада квазичастиц.

Рассмотрим распад квазичастицы (с импульсом  $\mathbf{p}$ ) на две. Если  $\mathbf{q}$  — импульс одной из возникающих квазичастиц, то импульс другой есть  $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ , и закон сохранения энергии дает условие

$$\varepsilon(p) = \varepsilon(q) + \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|). \quad (34,1)$$

Может оказаться, что в некоторой области значений  $p$  это равенство не выполняется ни при каких  $q$ ; тогда квазичастицы в этой области будут вообще не затухающими (если, конечно, невозможен также и распад на большее число квазичастиц). По мере изменения  $p$  затухание возникает при значении  $p = p_c$  (порог распада), при котором впервые появляются корни уравнения (34,1).

Отметим прежде всего, что в точке  $p = p_c$  правая сторона равенства (34,1), как функция от  $q$ , имеет экстремум. Действительно, пусть экстремальное значение суммы  $\varepsilon(q) + \varepsilon(|p - q|)$  при заданном  $p$  есть  $E(p)$  (для определенности будем считать, что это — минимум).

$$\varepsilon(p) - E(p) = \varepsilon(q) + \varepsilon(|p - q|) - E(p)$$

правая сторона неотрицательна. Поэтому уравнение заведомо не имеет корней при значениях  $p$ , для которых  $\varepsilon(p) - E(p) < 0$ ; корень появляется только в точке  $p = p_c$ , в которой  $\varepsilon(p_c) = E(p_c)$ .

Представив уравнение (34,1) в симметричном виде

$$\varepsilon(p) = \varepsilon(q_1) + \varepsilon(q_2), \quad q_1 + q_2 = p,$$

найдем, что условие экстремума его правой части можно записать как  $\partial\varepsilon/\partial q_1 = \partial\varepsilon/\partial q_2$  или

$$v_1 = v_2, \quad (34,2)$$

т. е. в пороговой точке две распадные квазичастицы имеют одинаковые скорости. Здесь можно различать несколько случаев (Л. П. Питаевский, 1959).

а) Скорость квазичастицы в бозе-жидкости равна нулю при импульсе  $p = p_0$ , отвечающем ротонному минимуму на кривой рис. 2. Поэтому если  $v_1 = v_2 = 0$ , то это значит, что в точке порога квазичастица распадается на два ротона с импульсами  $p_0$  и энергиями  $\Delta$ . Соответственно энергия распадающейся квазичастицы  $\varepsilon(p_c) = 2\Delta$ , а ее импульс  $p_c$  связан с  $p_0$  условием  $p_c = p_{01} + p_{02}$ , т. е.  $2p_0 \cos \theta = p_c$ , где  $2\theta$  — угол разлета двух ротонов. Отсюда следует, что во всяком случае должно быть

$$p_c < 2p_0. \quad (34,3)$$

б) Если скорости  $v_1 = v_2 \neq 0$ , причем соответствующие им импульсы  $q_1$  и  $q_2$  конечны, то это значит, что распад в пороговой точке происходит на две квазичастицы с коллинеарными (параллельными или антипараллельными) импульсами<sup>1)</sup>.

в) Если же скорости  $v_1$  и  $v_2$  отличны от нуля, но один из импульсов (скажем,  $q_1$ ) стремится к нулю вблизи пороговой точки, то соответствующая ему квазичастица является фононом и скорость  $v_1 = u$ . В этом случае мы имеем дело с порогом, за которым становится возможным рождение квазичастицей фонона. В самой пороговой точке энергия фонона равна нулю, а скорость квазичастицы как раз достигает скорости звука (совпадая со скоростями  $v_1 = v_2 = u$ ).

<sup>1)</sup> В силу изотропии жидкости направления импульса квазичастицы  $p$  и ее скорости  $v = \partial\varepsilon/\partial p$  коллинеарны, но могут быть направлены как в одинаковую, так и в противоположные стороны.

г) Наконец, еще один, особый случай представляет распад фонона на два фонона, причем порогом является сама начальная точка спектра  $p=0$ . Такой распад, однако, возможен лишь при определенном знаке кривизны начального (фононного) участка спектра: должно быть  $d^2\varepsilon(p)/dp^2 > 0$ , т. е. кривая  $\varepsilon(p)$  должна загигаться вверх от начальной касательной  $\varepsilon=up$ . В этом легко убедиться, представив этот участок спектра в виде

$$\varepsilon(p) \approx up + \alpha p^3, \quad (34,4)$$

учитывающем наряду с линейным также и следующий член разложения по степеням малого импульса<sup>1)</sup>. Уравнение сохранения энергии (34,1) дает тогда

$$u(p-q - |\mathbf{p}-\mathbf{q}|) = -\alpha(p^3 - q^3 - |\mathbf{p}-\mathbf{q}|^3).$$

Вблизи порога фонон испускается под малым углом  $\theta$  к направлению начального импульса квазичастицы  $\mathbf{p}$ ; в левой стороне уравнения имеем

$$p-q - |\mathbf{p}-\mathbf{q}| \approx -\frac{pq}{p-q}(1 - \cos\theta), \quad (34,5)$$

а в правой достаточно положить  $|\mathbf{p}-\mathbf{q}| \approx p-q$ . Тогда находим

$$1 - \cos\theta = 3\alpha(p-q)^2. \quad (34,6)$$

Отсюда видно, что должно быть  $\alpha > 0$ .

Мы увидим ниже (§ 35), что в случаях а) и б) функция  $\varepsilon(p)$  вообще не может быть продолжена за пороговую точку, оказывающуюся, таким образом, точкой окончания спектра. В случаях же в) и г) распад квазичастицы с испусканием длинноволнового фонона приводит к появлению слабого затухания, которое может быть определено с помощью теории возмущений<sup>2)</sup>.

Вычислим затухание фонона, связанное с его распадом на два фонона (случай г)). Матричные элементы этого процесса имеются в членах третьего порядка в гамильтониане, дающихся выражением (24,12). Для перехода из начального ( $i$ ) состояния с одним фононом  $\mathbf{p}$  в конечное ( $f$ ) состояние с фононами  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_2$

<sup>1)</sup> Дисперсионное уравнение звуковых колебаний определяет квадрат частоты  $\omega^2$  как функцию волнового вектора. Соответственно этому, регулярно разлагается по степеням импульса  $\mathbf{p}$  квадрат энергии фонона  $\varepsilon^2(p)$ ; разложение начинается с члена  $\sim p^2$  и ввиду изотропии жидкости происходит по степеням  $p^2$ . Разложение же самой функции  $\varepsilon(p)$  содержит, следовательно, нечетные степени  $p$ .

<sup>2)</sup> Какие именно из перечисленных случаев могут фактически осуществляться — зависит от конкретного хода кривой спектра квазичастиц  $\varepsilon(p)$ . Эмпирические данные для жидкого гелия ( $\text{He}^4$ ) свидетельствуют о наличии (при давлениях  $< 15$  атм) небольшого начального участка фононного спектра, в котором имеется неустойчивость типа случая г). Окончание же спектра в жидком гелии имеет место в точке типа случая а).

матричный элемент оператора возмущения равен

$$V_{fi} = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \frac{3! (2\pi\hbar)^3}{2(2V)^{3/2}} \left( \frac{u}{\rho} p q_1 q_2 \right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{\rho^2}{3u^2} \frac{d u^2}{d\rho} \right\} \quad (34,7)$$

(индекс 0 у невозмущенной плотности  $\rho_0$  опускаем). Обратим внимание на наличие множителя  $(p q_1 q_2)^{1/2}$ ; его малость (речь идет о распаде длинноволнового фонона) и обеспечивает применимость теории возмущений<sup>1)</sup>.

Дифференциальная вероятность распада (в 1 сек) дается формулой

$$d\omega = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i) \frac{V^2 d^3 q_1 d^3 q_2}{(2\pi\hbar)^6}$$

(см. III (43,1)). При подстановке сюда (34,7) возникает квадрат  $\delta$ -функции; его надо понимать как<sup>2)</sup>

$$[\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)]^2 = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2). \quad (34,8)$$

Остающаяся  $\delta$ -функция устраняется интегрированием по  $d^3 q_2$ ; положив также  $E_i = u\rho$ ,  $E_f = u(q_1 + q_2)$ , получим

$$\omega = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\rho^2}{3u^2} \frac{d u^2}{d\rho} \right\}^2 \frac{9\pi}{4\hbar\rho} \int p q_1 (p - q_1) \delta(p - q_1 - |\mathbf{p} - \mathbf{q}_1|) \frac{d^3 q_1}{(2\pi\hbar)^3}$$

(при независимом интегрировании по  $d^3 q_1$  и  $d^3 q_2$  ответ должен быть поделен на 2 для учета тождественности двух фононов). Наконец, выразив аргумент  $\delta$ -функции в виде (34,5) и произведя интегрирование по  $d^3 q_1 = 2\pi q_1 dq_1 d\cos\theta$  (по области  $q_1 \leq p$ ), найдем полную вероятность распада

$$\omega = \frac{3\rho^5}{320\pi\rho\hbar^4} \left\{ 1 + \frac{\rho^2}{3u^2} \frac{d u^2}{d\rho} \right\}^2. \quad (34,9)$$

Коэффициент затухания фонона  $\gamma \equiv -\text{Im} \varepsilon = \hbar\omega/2$ . В частности, для почти идеального газа, согласно (25,11), величина

<sup>1)</sup> При вычислении матричного элемента (34,7) следует учесть, что каждый из фононных операторов  $\hat{c}_p$  и  $\hat{c}_p^+$  может браться из любого из трех множителей  $\hat{\rho}'$  или  $\hat{v}$ ; отсюда множитель 3!. Дельта-функция в (34,7) возникает от интегрирования множителя  $\exp[i(\mathbf{p} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)\mathbf{r}/\hbar]$ . Наконец, учтено, что направления  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_2$  почти совпадают.

<sup>2)</sup> Действительно,  $\delta$ -функция  $\delta(\mathbf{k})$  возникает от интеграла  $\int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3 k / (2\pi)^3$ . Если же вычислить другой такой же интеграл при  $\mathbf{k} = 0$  (в силу наличия уже одной  $\delta$ -функции), причем распространить интегрирование по конечному объему  $V$ , то получится  $V/(2\pi)^3$ ; это и выражено формулой (34,8).

$u^2/\rho \approx 4\pi\hbar^2 a/m^3$  не зависит от плотности. В этом случае

$$\gamma = \frac{3\rho^5}{640\pi\hbar^3\rho} \quad (34,10)$$

(С. Т. Белаяев, 1958).

Для процесса испускания фонона квазичастицей вблизи порога типа в) вид оператора возмущения устанавливается путем рассмотрения изменения энергии квазичастицы в звуковой волне. Это изменение складывается из двух частей:

$$\delta\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\rho' + \mathbf{v}\mathbf{p}.$$

Первый член связан с изменением плотности жидкости, от которой энергия квазичастицы зависит как от параметра. Второй член (в котором  $\mathbf{v}$ —скорость жидкости в звуковой волне) есть изменение энергии квазичастицы благодаря макроскопическому движению жидкости; поскольку длина волны испускаемого (вблизи порога) фонона велика по сравнению с длиной волны квазичастицы, можно считать, что последняя находится в однородном потоке жидкости, и тогда изменение ее энергии определяется, как было объяснено в начале § 23. Оператор возмущения получается из  $\delta\varepsilon$  заменой  $\mathbf{v} = \nabla\phi$  и  $\rho'$  вторично-квантованными операторами (24,10), а  $\mathbf{p}$ —оператором импульса квазичастицы  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ :

$$\hat{V} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\hat{\rho}' + \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{v}}) \quad (34,11)$$

(во втором члене произведена симметризация произведения для приведения его к эрмитову виду). Вычисление вероятности испускания фонона производится далее аналогично тому, как это было сделано выше для распада фонона (см. задачу).

### Задача

Определить вероятность испускания фонона квазичастицей с импульсом  $p$ , близким к пороговому значению  $p_c$ , при котором скорость квазичастицы достигает скорости звука.

Решение. Матричный элемент оператора (34,11) берется для рождения одного фонона (с импульсом  $q$ ) с одновременным переходом квазичастицы между состояниями (плоскими волнами) с импульсами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ . Вблизи порога импульс фонона  $q \ll p_c$ , а направление  $\mathbf{q}$  почти совпадает с направлением  $\mathbf{p}$ <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Для определенности рассматриваем случай, когда фонон испускается именно в таком (а не в обратном) направлении. Для этого функция  $\varepsilon(p)$  вблизи порога должна иметь вид

$$\varepsilon(p) \approx \varepsilon(p_c) + (p - p_c)u + \alpha(p - p_c)^2$$

(с положительным знаком в линейном члене). Из закона сохранения энергии легко убедиться, что испускание фонона возможно при этом, если  $\alpha > 0$ , и происходит при  $p > p_c$ ; импульс испускаемого фонона пробегает значения в интервале  $0 \leq q \leq 2(p - p_c)$ .

С учетом этого находим

$$V_{fi} = -i (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \frac{A}{\sqrt{3/2}} \left(\frac{qu}{2\rho}\right)^{1/2},$$

где

$$A = p_c + \frac{\rho}{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \Big|_{p=p_c}.$$

Отсюда дифференциальная вероятность испускания фонона

$$d\omega = \frac{\pi qu}{\hbar \rho} A^2 \delta[\varepsilon(p) - \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) - uq] \frac{d^3 q}{(2\pi\hbar)^3}$$

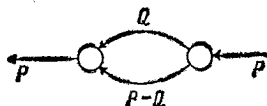
( $\delta$ -функция импульсов уже устранена интегрированием по  $d^3 p'$ ). Написав аргумент  $\delta$ -функции в приближенном виде  $-uq(1 - \cos \theta)$  и произведя интегрирование по  $d^3 q$ , получим

$$\omega = \frac{2A^2 (p - p_c)^3}{3\pi \rho \hbar^4}.$$

### § 35. Свойства спектра вблизи точки его окончания

В этом параграфе мы рассмотрим свойства спектра бозе-жидкости вблизи порогов распада элементарных возбуждений на две квазичастицы, из которых ни одна не является фононом (случаи а) и б) из § 34)<sup>1)</sup>. В противоположность распадам с рождением фонона, к этим случаям теория возмущения неприменима, и их исследование требует выяснения характера особенностей, которые имеют в пороговых точках гриновские функции жидкости. С другой стороны, тот факт, что нас будет интересовать только эти особенности, позволяет существенно схематизировать и тем самым упростить вычисления. В частности, можно не делать различия между функциями  $G$  и  $F$  (поскольку их аналитические свойства одинаковы) и поступать так, как если бы существовал только один тип гриновских функций; учет различия между  $G$  и  $F$  привел бы лишь к появлению в уравнениях нескольких аналогичных (по своим аналитическим свойствам) членов, что не отразилось бы на результатах.

Тот факт, что интересующая нас особенность гриновской функции связана с распадом квазичастицы на две другие, в терминах диаграммной техники означает, что она происходит от диаграмм вида



(35,1)

которые могут быть рассеяны по двум сплошным линиям, т. е. которые содержат в себе двухчастичные промежуточные состоя-

<sup>1)</sup> Содержание этого параграфа принадлежит Л. П. Питаевскому (1959).