

С учетом этого находим

$$V_{fi} = -i (2\pi\hbar)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \frac{A}{\sqrt{3/2}} \left(\frac{qu}{2\rho}\right)^{1/2},$$

где

$$A = p_c + \frac{\rho}{u} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \Big|_{p=p_c}.$$

Отсюда дифференциальная вероятность испускания фонона

$$d\omega = \frac{\pi qu}{\hbar \rho} A^2 \delta[\varepsilon(p) - \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) - uq] \frac{d^3 q}{(2\pi\hbar)^3}$$

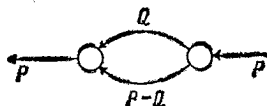
(δ -функция импульсов уже устранена интегрированием по $d^3 p'$). Написав аргумент δ -функции в приближенном виде $-uq(1 - \cos \theta)$ и проведя интегрирование по $d^3 q$, получим

$$\omega = \frac{2A^2 (p - p_c)^3}{3\pi \rho \hbar^4}.$$

§ 35. Свойства спектра вблизи точки его окончания

В этом параграфе мы рассмотрим свойства спектра бозе-жидкости вблизи порогов распада элементарных возбуждений на две квазичастицы, из которых ни одна не является фононом (случаи а) и б) из § 34)¹⁾. В противоположность распадам с рождением фонона, к этим случаям теория возмущения неприменима, и их исследование требует выяснения характера особенностей, которые имеют в пороговых точках гриновские функции жидкости. С другой стороны, тот факт, что нас будет интересовать только эти особенности, позволяет существенно схематизировать и тем самым упростить вычисления. В частности, можно не делать различия между функциями G и F (поскольку их аналитические свойства одинаковы) и поступать так, как если бы существовал только один тип гриновских функций; учет различия между G и F привел бы лишь к появлению в уравнениях нескольких аналогичных (по своим аналитическим свойствам) членов, что не отразилось бы на результатах.

Тот факт, что интересующая нас особенность гриновской функции связана с распадом квазичастицы на две другие, в терминах диаграммной техники означает, что она происходит от диаграмм вида



(35,1)

которые могут быть рассеяны по двум сплошным линиям, т. е. которые содержат в себе двухчастичные промежуточные состоя-

¹⁾ Содержание этого параграфа принадлежит Л. П. Питаевскому (1959).

ния. В этих диаграммах по промежуточному 4-импульсу $Q = (q_0, \mathbf{q})$ производится интегрирование, причем определяющую (в смысле возникновения особенности) роль играет область значений Q и $P - Q$, с которыми распадные квазичастицы (продукты распада) рождаются вблизи порога. Основным для излагаемой ниже теории является утверждение, что эта область значений 4-импульса не является особой для функции Грина $G(Q)$: в ней она имеет обычный полюсной вид

$$G(Q) \equiv G(q_0, \mathbf{q}) \sim [q_0 - \varepsilon(q) + i0]^{-1}, \quad (35,2)$$

где функция $\varepsilon(q)$ — энергия распадных квазичастиц — не имеет особенностей. Физическая выделенность этой области состоит лишь в том, что в ней квазичастица могла бы «слипнуться» с другой квазичастицей; но этот процесс невозможен при нуле температуры ввиду отсутствия реальных возбуждений. Особой областью для функции Грина являются лишь значения P (внешние линии диаграмм (35,1)) вблизи порога распада исходной квазичастицы.

Двум соединительным линиям на диаграмме (35,1) отвечают множители $G(Q)G(P-Q)$, а по Q производится интегрирование. При этом, ввиду существенности лишь малой области значений Q , остальные множители в диаграмме можно считать при интегрировании постоянными, равными их значению при пороговом значении $Q = Q_c$ ¹⁾. Таким образом, в диаграмме возникает множитель, выражающийся интегралом

$$\Pi(P) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4Q}{[q_0 - \varepsilon(q) + i0] [\omega - q_0 - \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) + i0]},$$

где $P = (\omega, \mathbf{p})$. Интегрирование по dq_0 выполняется путем замыкания пути интегрирования бесконечно удаленной полуокружностью в одной из полуплоскостей комплексного q_0 и дает

$$\Pi(P) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{\omega - \varepsilon(q) - \varepsilon(|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) + i0}. \quad (35,3)$$

К исследованию этого интеграла мы вернемся ниже, а теперь надо выразить через него искомую точную функцию $G(P)$, просуммировав для этого все диаграммы вида (35,1).

¹⁾ Это утверждение следует уточнить. Дело в том, что множители $G(Q)G(P-Q)$ не зависят от угла φ , определяющего положение плоскости (\mathbf{p}, \mathbf{q}) . Поэтому интегрирование по $d\varphi$ сводится к усреднению остальной части подынтегрального выражения по φ , после чего d^4Q можно понимать как $2\pi q^2 dq_0 dq d\cos\theta$. Именно в таком интегрировании по d^4Q существенна малая область. Это замечание относится и к другим аналогичным моментам вычислений ниже.

Для функции $G(P)$ можно написать диаграммное уравнение Дайсона

$$\text{---} \overset{P}{\leftarrow} = \text{---} \overset{P}{\leftarrow} + \text{---} \overset{P}{\leftarrow} \text{---} \overset{G}{\text{---}} \text{---} \overset{P}{\leftarrow} \text{---} \overset{P-Q}{\leftarrow} \text{---} \overset{P}{\leftarrow} \quad (35,4)$$

Здесь жирные линии изображают точную функцию iG , а светлые — «неособую» часть этой функции, определяемую совокупностью диаграмм, «неделимых по двум линиям». Второй же член в правой части (35,4) изображает совокупность диаграмм вида (35,1). При этом светлый кружок представляет точную «трехконцевую» вершинную функцию (обозначим ее $\Gamma(Q, P-Q, P)$), а заштрихованный — ее неособую часть, из которой исключены диаграммы, могущие быть рассечены по двум сплошным линиям¹⁾. Как было объяснено выше, интегрирование по d^4Q приводит к появлению множителя $\Pi(P)$, причем остальные множители в диаграмме заменяются их значением при $Q = Q_c$. Таким образом, равенство (35,4) означает, что

$$G(P) = a(P) + b(P) G(P) \Gamma_c(P) \Pi(P), \quad (35,5)$$

где $\Gamma_c(P) = \Gamma(Q_c, P-Q_c, P)$, а $a(P)$, $b(P)$ — некоторые регулярные (вблизи порога $P = P_c$) функции.

В (35,5) фигурируют две особые функции — G и Γ_c , и для выражения их через Π необходимо поэтому еще одно уравнение. Мы получим его, заметив, что точная вершинная функция Γ представляется рядом «лестничного» вида

$$\text{---} \text{---} \text{---} \text{---} = \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

аналогичным рядом (17,3) для четырехконцевой вершинной функции. Его суммирование приводит к уравнению

$$\text{---} \overset{Q}{\leftarrow} \text{---} \overset{P}{\leftarrow} \text{---} \overset{P-Q}{\leftarrow} = \text{---} \overset{Q}{\leftarrow} \text{---} \overset{Q_c}{\leftarrow} \text{---} \overset{P}{\leftarrow} \text{---} \overset{P-Q_1}{\leftarrow} \text{---} \overset{P}{\leftarrow} + \text{---} \overset{Q}{\leftarrow} \text{---} \overset{P-Q}{\leftarrow} \text{---} \overset{P}{\leftarrow}$$

(ср. (17,4)); в аналитическом виде, при $Q \approx Q_c$, оно дает

$$\Gamma_c(P) = c(P) + d(P) \Pi(P) \Gamma_c(P),$$

где $c(P)$, $d(P)$ — регулярные функции. Исключив теперь Γ_c из двух полученных уравнений, найдем искомое выражение

¹⁾ Ситуация здесь аналогична уравнению Дайсона в квантовой электродинамике (см. IV § 104): как и там, вся требуемая совокупность диаграмм получается путем введения поправок лишь к одной из вершинных функций.

функции Грина через Π :

$$G^{-1}(P) = \frac{A(P)\Pi(P)}{1+B(P)\Pi(P)} + C(P), \quad (35,6)$$

где A, B, C — снова регулярные (вблизи $P = P_c$) функции.

Дальнейшие вычисления различны для разных типов распадов квазичастиц.

а) Порог распада на два ротона

В этом случае энергия $\varepsilon(q)$ распадных частиц вблизи порога дается формулой (22,6), и интеграл (35,3) принимает вид

$$\Pi(\omega, q) = \int \left\{ \omega - 2\Delta - \frac{1}{2m^*} \left[(q-p_0)^2 + (|\mathbf{p}-\mathbf{q}|-p_0)^2 \right] \right\}^{-1} \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \quad (35,7)$$

Для интегрирования вводим новые переменные q'_z, q'_ρ , согласно определению,

$$q_x = (p_0 \sin \theta + q'_\rho) \cos \varphi, \quad q_y = (p_0 \sin \theta + q'_\rho) \sin \varphi, \\ q_z = p_0 \cos \theta + q'_z,$$

причем ось z направлена вдоль \mathbf{p} , а угол θ определен равенством $2p_0 \cos \theta = p$. Вблизи порога q'_z, q'_ρ малы, и с нужной точностью имеем

$$q \approx p_0 + q'_\rho \sin \theta + q'_z \cos \theta, \quad |\mathbf{p}-\mathbf{q}| \approx p_0 + q'_\rho \sin \theta - q'_z \cos \theta, \\ d^3q \approx p_0 \sin \theta dq'_\rho dq'_z d\varphi.$$

Выражение в фигурных скобках в (35,7) принимает вид

$$\left\{ \omega - 2\Delta - \frac{1}{m^*} (q'^2_\rho \sin^2 \theta + q'^2_z \cos^2 \theta) \right\}$$

и после повторной замены переменных

$$q'_\rho \sin \theta = \sqrt{m^*} \rho \cos \psi, \quad q'_z \cos \theta = \sqrt{m^*} \rho \sin \psi$$

находим, интегрируя по ψ ,

$$\Pi(\omega, \rho) = -\frac{m^* p_0}{2\pi \cos \theta} \int \frac{\rho d\rho}{-\omega + 2\Delta + \rho^2}.$$

Расходимость этого интеграла при больших ρ связана лишь со сделанными пренебрежениями и несущественна; обрезание интеграла при некотором значении $\rho^2 \gg |2\Delta - \varepsilon|$ даст вклад лишь в регулярную часть Π . Интересующая же нас особая часть этой функции возникает от области вблизи нижнего предела интегрирования, и для нее находим

$$\Pi \propto \ln \frac{1}{2\Delta - \omega}. \quad (35,8)$$

При малых значениях $2\Delta - \omega$ этот логарифм велик; подставив (35,8) в (35,6) и разложив по его обратным степеням, получим

$$G^{-1}(\omega, p) = b + c \ln^{-1} \frac{a}{2\Delta - \omega},$$

где a, b, c — новые регулярные функции от ω и p . В пороговой точке ($p = p_c$) энергия распадающейся квазичастицы равна 2Δ . Поскольку энергия квазичастиц определяется нулями функции G^{-1} , то это значит, что $G^{-1}(2\Delta, p_c) = 0$, а для этого должно быть и $b(2\Delta, p_c) = 0$. Но регулярная функция $b(\omega, p)$ разлагается по целым степеням разностей $p - p_c$ и $\omega - 2\Delta$; заменив также регулярные функции $a(\omega, p)$ и $c(\omega, p)$ их значениями в пороге, получим в результате следующее выражение функции Грина в околпороговой области:

$$G^{-1}(\omega, p) = \beta \left[p - p_c + \alpha \ln^{-1} \frac{a}{2\Delta - \omega} \right], \quad (35,9)$$

где a, α, β — постоянные.

Приравняв это выражение нулю, мы получим вид спектра $\varepsilon(p)$ вблизи порога. Если область невозможности распада лежит при $p < p_c$, $\varepsilon < 2\Delta$, то постоянные α и a должны быть положительными и уравнение $G^{-1} = 0$ имеет здесь незатухающее решение

$$\varepsilon = 2\Delta - a \exp\left(-\frac{\alpha}{p_c - p}\right). \quad (35,10)$$

Мы видим, что кривая спектра подходит к пороговой точке с горизонтальной касательной бесконечного порядка. В области же $p > p_c$ уравнение $G^{-1} = 0$ не имеет ни вещественных, ни комплексных решений с $\varepsilon \approx 2\Delta$ при $p \approx p_c$. В этом смысле кривая спектра вообще не продолжается за пороговую точку, оканчиваясь в ней¹⁾.

б) Порог распада на две квазичастицы с параллельными импульсами

Поскольку в пороговой точке, при $p = p_c$, выражение $\varepsilon(q) - \varepsilon(|p - q|)$, как функция от q , должно иметь минимум, то вблизи порога оно имеет вид

$$\varepsilon(q) - \varepsilon(|p - q|) = \varepsilon_c + v_c(p - p_c) + \alpha(q - q_0)^2 + \beta(q - q_0, p_c)^2, \quad (35,11)$$

¹⁾ Как уже было указано в примечании на стр. 163, в жидком гелии спектр заканчивается именно в точке такого типа (кривая на рис. 2 приближается к прямой $\varepsilon = 2\Delta$ с горизонтальной касательной).

где α, β — постоянные; v_c есть скорость каждой из рождающихся в пороговой точке распадных квазичастиц, а \mathbf{q}_0 — импульс одной из них. Подставив (35,11) в (35,3) и введя новые переменные интегрирования согласно

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_0, \quad \rho p_c = \rho p_c \cos \psi,$$

получим

$$\Pi(\omega, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{\rho^2 d\rho d\cos\psi}{\varepsilon - \varepsilon_c - v_c(p - p_c) - \alpha\rho^2 - \beta\rho^2 p_c^2 \cos^2\psi}.$$

Этот интеграл имеет в пороговой точке корневую особенность:

$$\Pi \sim [v_c(p - p_c) - (\varepsilon - \varepsilon_c)]^{1/2}. \quad (35,12)$$

Подставив это выражение в (35,6), находим гриновскую функцию в околороговой области

$$G^{-1}(\omega, \mathbf{p}) = A(\omega, \mathbf{p}) + B(\omega, \mathbf{p}) [v_c(p - p_c) - (\omega - \varepsilon_c)]^{1/2}.$$

Так как $G^{-1}(\varepsilon_c, \mathbf{p}_c) = 0$, а A и B — регулярные функции, то, разлагая последние по степеням $p - p_c$ и $\omega - \varepsilon_c$, окончательно находим

$$G^{-1} \sim [v_c(p - p_c) - (\omega - \varepsilon_c)]^{1/2} + [a(p - p_c) + b(\omega - \varepsilon_c)], \quad (35,13)$$

где a, b — постоянные.

Вид спектра определяется уравнением $G^{-1}(\varepsilon, \mathbf{p}) = 0$. Ищем его решение в виде $\varepsilon - \varepsilon_c = v_c(p - p_c) + \text{const}(p - p_c)^2$; для того чтобы оно существовало при $p < p_c$, должно быть $a + bv_c > 0$ и тогда

$$\varepsilon = \varepsilon_c + v_c(p - p_c) - (a + bv_c)^2 (p - p_c)^2. \quad (35,14)$$

При том же условии в области $p > p_c$ уравнение $G^{-1} = 0$ не имеет решений с $\varepsilon \approx \varepsilon_c$ при $p \approx p_c$. Таким образом, и в этом случае спектр обрывается в пороговой точке.