причем на вещественной оси

$$\operatorname{Im} G(\omega, \mathbf{p}) < 0 \tag{36,22}$$

(функция G определяется, согласно (31,1), с усреднением по распределению Гиббса вместо усреднения по основному состоянию). Для идеального бозе-газа функция G^R дается той же формулой (36,17), а функция G:

$$G^{(0)}(\omega, \mathbf{p}) = P\frac{1}{\omega - p^2/2m + \mu} - i\pi \operatorname{cth}\frac{\omega}{2T} \cdot \delta\left(\omega - \frac{p^2}{2m} + \mu\right). \tag{36,23}$$

Физический смысл функций Грина при отличных от нуля температурах в основном совпадает с их смыслом при $T=0$. Разумеется, остаются справедливыми формулы, связывающие гриновскую функцию G с импульсным распределением частиц (7,23) и вообще с матрицей плотности (7,18), (31,4).

Остаются в силе также и основные утверждения о совпадении полюсов функции Грина с энергией элементарных возбуждений (поскольку, однако, сама функция G не аналитична, то при этом удобнее говорить о полюсах аналитической функции G^R, которые она имеет в нижней полуплоскости ω, или о полюсах функции G^A в верхней полуплоскости). Это утверждение снова (как и в § 8) следует из разложения (36,6). Хотя в различных членах этого разложения фигурируют теперь частоты переходов ω_{mn} между любыми двумя состояниями системы, но (после перехода к макроскопическому пределу) по-прежнему остаются полюсы, отвечающие лишь переходам из основного состояния в состояния с одним элементарным возбуждением. Переходы же между двумя возбужденными состояниями не приводят к возникновению полюса в макроскопической одночастичной функции Грина по той же причине, по которой не приводят к возникновению полюса и переходы из основного в состояния с более чем одной квазичастицей (см. § 8): разность энергий таких состояний не определяется однозначным образом разностью их импульсов.

Подчеркнем также, что при отличных от нуля температурах продолжительность жизни квазичастиц связана не только с их собственной неустойчивостью, но и с их столкновениями друг с другом. Затухание от обоих этих источников должно быть слабым для того, чтобы понятие о квазичастицах продолжало иметь смысл.

§ 37. Температурные функции Грина

Для построения диаграммной техники вычисления гриновской функции при конечных температурах надо было бы перейти от гейзенберговского представления ψ-операторов к представлению взаимодействия, как это было сделано в § 12. При этом мы снова пришли бы к выражению, отличающемуся от (12,12) лишь тем, что усреднение производится не по основному состоянию. Это отличие, однако, очень существенно: усреднение оператора $\hat{S}^{-1}$ уже не может быть отделено от усреднения остальных множителей, как это было сделано при переходе от (12,12) к (12,14); дело в том, что неосновное состояние под влиянием оператора $\hat{S}^{-1}$ переводится не само в себя, а в некоторую суперпозицию возбужденных состояний с той же энергией (включающую в себя результаты всевозможных процессов взаимного рассеяния квазичастиц). Это обстоятельство приводит к существенному усложнению диаграммной техники—возникают новые члены от свертываний, в которых участвуют также и ψ-операторы из $\hat{S}^{-1}$.

Можно, однако, изменить определение гриновской функции таким образом, чтобы подобных усложнений не возникало. Основанный на этом определении математический аппарат, разработанный *Мацубарой* (*T. Matsubara*, 1955), в особенности целесообразен для вычисления термодинамических величин макроскопической системы.

Введем так называемые *мацубаровские* ψ-операторы, согласно определению[1]),

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}^M_\alpha(\tau,\ \mathbf{r}) &= e^{\tau\hat{H}'}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\,e^{-\tau\hat{H}'},\\ \hat{\bar{\Psi}}^M_\alpha(\tau,\ \mathbf{r}) &= e^{\tau\hat{H}'}\hat{\psi}^+_\alpha(\mathbf{r})\,e^{-\tau\hat{H}'}, \end{aligned} \tag{37,1}$$

где τ—вспомогательная вещественная переменная; эти операторы отличаются, с формальной точки зрения, от гейзенберговских операторов заменой в последних вещественной переменной t мнимой величиной $-i\tau$[2]). Такой же заменой ($\hat{\Psi} \to \hat{\Psi}^M$, $\hat{\Psi}^+ \to \hat{\bar{\Psi}}^M$, $i\partial/\partial t \to -\partial/\partial\tau$), например в (7,8), получаются уравнения, которым удовлетворяют операторы (37,1). С помощью этих операторов новая функция Грина $\mathscr{G}$ определяется аналогично тому, как обычная гриновская функция G определяется через гейзенберговские ψ-операторы:

$$\mathscr{G}_{\alpha\beta}(\tau_1,\ \mathbf{r}_1;\ \tau_2,\ \mathbf{r}_2) = -\langle T_\tau \hat{\Psi}^M_\alpha(\tau_1,\ \mathbf{r}_1)\,\hat{\bar{\Psi}}^M_\beta(\tau_2,\ \mathbf{r}_2)\rangle, \tag{37,2}$$

где символ T_τ означает «τ-хронологизацию»—расположение опе-

---

[1]) В этом параграфе мы будем писать формулы одновременно для ферми-систем и бозе-систем (выше λ-точки). При разнице в знаках ферми-системам будут отвечать верхние, и бозе-системам—нижние знаки. Кроме того, для бозе-систем следует опустить спиновые индексы.

[2]) Подчеркнем, что в виду этого отличия оператор $\hat{\bar{\Psi}}^M$ отнюдь не совпадает с $\hat{\Psi}^{M+}$.

раторов в порядке увеличения τ справа налево (с изменением знака при перестановке операторов в случае ферми-систем); скобки же $\langle\ldots\rangle$ означают усреднение по распределению Гиббса. Последнее можно представить в явном виде, записав определение (37,2) как

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta}=-\mathrm{Sp}\,\{\hat{w}\mathrm{T}_\tau\hat{\Psi}^M_\alpha(\tau_1,\,\mathbf{r}_1)\,\hat{\bar{\Psi}}^M_\beta(\tau_2,\,\mathbf{r}_2)\},\qquad \hat{w}=\exp\left(\frac{\Omega-\hat{H}'}{T}\right),\tag{37,3}$$

где Sp означает сумму всех диагональных матричных элементов. Определенную таким образом гриновскую функцию называют *температурной* в отличие от «обычной» функции G (которую называют в этой связи *временной*).

Как и $G_{\alpha\beta}$, функция $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ для неферромагнитной системы в отсутствие внешнего магнитного поля сводится к скаляру: $\mathcal{G}_{\alpha\beta}=\mathcal{G}\delta_{\alpha\beta}$. Для пространственно-однородной системы ее зависимость от $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ снова сводится к зависимости от разности $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$.

Легко также видеть, что уже по самому определению (37,3) функция $\mathcal{G}$ зависит только от разности $\tau=\tau_1-\tau_2$. Пусть, например, $\tau_1<\tau_2$; тогда имеем [1])

$$\mathcal{G}=\pm\frac{1}{(2)}e^{\Omega/T}\mathrm{Sp}\,\{e^{-\hat{H}'/T}e^{\tau_2\hat{H}'}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_2)\,e^{(-\tau_2+\tau_1)\hat{H}'}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1)\,e^{-\tau_1\hat{H}'}\}$$

или, произведя под знаком Sp циклическую перестановку множителей:

$$\mathcal{G}=\pm\frac{1}{(2)}e^{\Omega/T}\,\mathrm{Sp}\,\{e^{-(1/T+\tau)\hat{H}'}\hat{\psi}^+_\alpha(\mathbf{r}_2)\,e^{\tau\hat{H}'}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1)\},\qquad \tau<0,\tag{37,4}$$

откуда и очевидно сделанное утверждение.

Переменная τ будет фактически пробегать значения лишь в конечном интервале

$$-1/T\leqslant\tau\leqslant 1/T.\tag{37,5}$$

При этом значения функции $\mathcal{G}(\tau)$ при $\tau<0$ и $\tau>0$ связаны друг с другом простым соотношением. При $\tau=\tau_1-\tau_2>0$, аналогично выводу (37,4), находим

$$\mathcal{G}=-\frac{1}{(2)}e^{\Omega/T}\,\mathrm{Sp}\,\{e^{-(1/T-\tau)\hat{H}'}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1)\,e^{-\tau\hat{H}'}\hat{\psi}^+_\alpha(\mathbf{r}_2)\}=$$

$$=-\frac{1}{(2)}e^{\Omega/T}\,\mathrm{Sp}\,\{e^{-\tau\hat{H}'}\hat{\psi}^+_\alpha(\mathbf{r}_2)\,e^{-(1/T-\tau)\hat{H}'}\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}_1)\},\qquad \tau>0,$$

---

[1]) Заключенный в скобки множитель 2 относится к ферми-системам, а для бозе-систем должен быть заменен единицей.

а сравнив это выражение с (37,4), получим

$$\mathcal{G}(\tau) = \mp \mathcal{G}\left(\tau + \frac{1}{T}\right), \quad \tau < 0 \tag{37,6}$$

(ввиду (37,5) аргумент функции справа при $\tau < 0$ положителен).

Разложим теперь функцию $\mathcal{G}(\tau, \mathbf{r})$ в интеграл Фурье по координатам и в ряд Фурье по τ (на интервале (37,5))[1]:

$$\mathcal{G}(\tau, \mathbf{r}) = T \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int e^{i(\mathbf{pr} - \zeta_s \tau)} \mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \tag{37,7}$$

причем для ферми-систем

$$\zeta_s = (2s+1)\pi T, \tag{37,8а}$$

а для бозе-систем

$$\zeta_s = 2s\pi T \tag{37,8б}$$

($s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); при этом автоматически выполняется условие (37,6). Обратное к (37,7) преобразование имеет вид

$$\mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p}) = \int_0^{1/T} \int e^{-i(\mathbf{pr} - \zeta_s T)} \mathcal{G}(\tau, \mathbf{r})\, d^3x\, d\tau \tag{37,9}$$

(интеграл по области $-1/T \leqslant \tau \leqslant 1/T$ преобразован в интеграл от 0 до $1/T$ с учетом (37,6) и (37,8)).

Вычисления, аналогичные произведенным в § 36, позволяют выразить $\mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p})$ через матричные элементы шредингеровских ψ-операторов. Они приводят к результату

$$\mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p}) = \frac{(2\pi)^3}{(2)} \sum_{m,n} w_n \frac{A_{mn}\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}_{mn})}{i\zeta_s - \omega_{mn}} \left(1 \pm e^{-\omega_{mn}/T}\right). \tag{37,10}$$

Отсюда видно прежде всего, что

$$\mathcal{G}(-\zeta_s, \mathbf{p}) = \mathcal{G}^*(\zeta_s, \mathbf{p}). \tag{37,11}$$

Далее, сравнив (37,10) с разложениями (36,6) и (36,20) для G^R, найдем, что

$$\mathcal{G}(\zeta_s, \mathbf{p}) = G^R(i\zeta_s, \mathbf{p}), \quad \zeta_s > 0. \tag{37,12}$$

Условие $\zeta_s > 0$ связано с тем, что выражения (36,6) и (36,20) справедливы непосредственно лишь в верхней полуплоскости ω, как это объяснено на стр. 174. Таким образом, в компонентах Фурье температурная функция Грина совпадает с запаздывающей функцией Грина, взятой в дискретных точках мнимой оси ω.

---

[1]) Введение этого приема принадлежит *А. А. Абрикосову, Л. П. Горькову, И. Е. Дзялошинскому* (1959) и *Е. С. Фрадкину* (1959).

Этот результат позволяет, в частности, сразу написать выражение для температурной функции Грина идеального газа: заменой $\omega \longrightarrow i\zeta_s$ находим из (36,17)

$$\mathscr{G}^{(0)}(\zeta_s, \mathbf{p}) = \left[i\zeta_s - \frac{p^2}{2m} + \mu\right]^{-1}. \tag{37,13}$$

В следующем параграфе будет изложена диаграммная техника для вычисления функции $\mathscr{G}(\zeta_s, \mathbf{p})$. Для определения же функции $G^R(\omega, \mathbf{p})$ (и тем самым, в частности, для определения энергетического спектра системы) надо построить аналитическую функцию, совпадающую с $\mathscr{G}(\zeta_s, \mathbf{p})$ в точках $\omega = i\zeta_s$ и не имеющую особенностей в верхней полуплоскости ω. Эта процедура однозначна, если добавить требование $G^R(\omega, \mathbf{p}) \longrightarrow 0$ при $|\omega| \longrightarrow \infty$ (см. (36,11)). Тем не менее в конкретных случаях такое аналитическое продолжение может быть сопряжено с определенными трудностями. Но для вычисления термодинамических величин его производить не надо.

Так, для вычисления потенциала Ω можно исходить из выражения усредненной по распределению Гиббса матрицы плотности

$$N\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \pm \mathscr{G}_{\alpha\beta}(\tau_1, \mathbf{r}_1; \tau_1 + 0, \mathbf{r}_2) \tag{37,14}$$

(очевидного из определения (37,2); ср. (7,17)). Положив $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$ (и просуммировав по $\alpha = \beta$), получим для плотности системы

$$\frac{N}{V} = \pm T \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int \mathscr{G}(\zeta_s, \mathbf{p}) e^{-i\zeta_s\tau} \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Big|_{\tau \to -0}. \tag{37,15}$$

Это выражение определяет N как функцию μ, T, V, после чего $\Omega(\mu, T, V)$ вычисляется интегрированием равенства $N = -\partial\Omega/\partial\mu$.

§ 38. Диаграммная техника для температурных функций Грина

Диаграммная техника для вычисления температурной функции Грина $\mathscr{G}$ строится подобно тому, как это делалось в §§ 12, 13 для временной функции G. Тот факт, что определение мацубаровских ψ-операторов (37,1) отличается от определения гейзенберговских операторов лишь формальной заменой $it \longrightarrow \tau$, позволяет во многом воспользоваться прямой аналогией.

Прежде всего вводим мацубаровские операторы в «представлении взаимодействия», отличающиеся от (37,1) заменой точного гамильтониана $\hat{H}'$ на гамильтониан свободных частиц $\hat{H}'_0$:

$$\hat{\Psi}^M_{0\alpha}(\tau, \mathbf{r}) = \exp(\tau\hat{H}'_0)\,\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r})\exp(-\tau\hat{H}'_0). \tag{38,1}$$

Связь между операторами $\hat{\Psi}^M_{0\alpha}$ и $\hat{\Psi}^M_\alpha$ осуществляется мацуба-